

國立臺灣師範大學數學系碩士班碩士論文

指導教授：陳創義 博士

兩種改善四邊形辨識迷思的教學策略研究

—以國中七年級學生為對象

研 究 生： 林柏嘉

中 華 民 國 九 十 八 年 六 月

感謝所有的事與願違

謝 詞

小孩子玩積木，在大人眼中看來，不過是組合了又拆掉，拆掉了又組合，一點意義都沒有，但對他而言，意義就發生在拆掉跟組合之間。

研究生在寫論文的時候，多數都會冒出這個問題，唉，寫這些東西到底有什麼意義？事不關己的眾人，會認為你在做一件有價值的事，你就像那個在堆積木的小孩，而指導教授就像在旁觀的那個大人。

所以，如果你懷疑自己碩士論文的意義，那我想應該真的沒什麼意義，即使這個學位可以幫助你豐富履歷表，晉級加薪，完成眾人認為的自我實現，它的本質還是沒有意義。

首先我要感謝我的指導教授，陳創義老師，老師是個極聰明的人，他的聰明不僅展現在數學上，還無時無刻於我們的相處之中，我很幸運，這幾年能夠從老師那裡，學到對於數學教育的透徹洞察。

聰明的人通常比較霸道，可是老師很和善，他用身教告訴我，很強大也可以很溫和，過份彰顯自己的性格與能力，並不是奪取榮耀的唯一道路，這是老師送我的第二個寶貴禮物。

再來是謝豐瑞老師，六年前，我教書生涯最低潮的時候，差不多就要放棄了，老師用力的拉我一把，沒有她的幫助，就沒有後來那個具抗壓性，能夠在巨大體制架構的校園中，多數時候仍然自在揮灑理念的我。

接著是曹博盛老師，我跟老師認識得很晚，卻道別得很快，一年級時的評量課，是我研所生涯最愉快的上課時光，論文中各種測

驗的編撰能力，主要奠基於那門課的學習，滿載收穫又充滿愉悅氛圍的課堂，本身就值得被紀念。

然後是陳界山老師，數學教育組必修兩門數學，我選擇老師的互補問題和優選理論，與老師相處的並不深，但近距離接觸的那些時光，讓我認識到，原來優異的數學學者，是這個樣子啊。

兩位口試委員，陳光勳老師在百忙之中，細心的閱讀完整本論文，提供我極為實用的修改意見，讓論文得以完整呈現，黃文達老師在休息年，還專程來擔任委員，提供我具前瞻性的未來研究建議。

回到論文意義的問題，過程中有段很長的時間，我很懷疑自己研究的意義，直到某一刻，我知道自己做出來了，那感覺是一種頓悟，而頓悟其實來自長時間沉浸於研究中的累積。

也許我的論文不夠學術、不夠精練、手法上有許多顯得生嫩的表現，也許所寫的還傳達不了所領悟的，但我確切知道那些領悟，我像那個堆積木的小孩，拆掉跟組合之間，意義就這麼發生了。

最後，我要感謝自己能夠生長在一個承平的年代，以及所有的事與願違。

林柏嘉 2009.6.27

摘 要

本研究探討兩個改善四邊形辨識迷思的教學策略，在國中七年級的應用，這兩個策略分別是分類策略，以及非典型例性質察覺策略。

國中學生的四邊形辨識迷思有典型例、語意、空間視覺、互斥思維四種類型，迷思的存在，顯現了學生的圖形辨識能力，停留在 van Hiele 認知層次的視覺期，依據圖形輪廓來進行辨識。

研究者提出的兩個策略，希望能夠幫助學生提升至 van Hiele 認知層次的分析期，且在圖形包含關係上，擁有一些非形式演繹期的經驗。

採用的研究方法是實驗研究法，對象共有五個國中七年級班級，進行了分類與非典型例性質察覺兩種教學活動的實驗，並以預測、前測、後測、延後測，來審視策略應用的結果。

研究的結果發現，兩個策略均幫助學生，改善了四邊形辨識的迷思，分類策略有效的原因，在於學生進行分類操作時，注意力由圖形輪廓進入了圖形結構，分類完成的結果，提供了命名的脈絡，與包含關係的理解。

非典型例性質察覺策略有效的原因，在於學生利用文字紀錄，以及口語發表所查覺性質時，關注的焦點是在圖形的結構，記錄與發表的方式，整合過往學習圖形的知識，並且在思考的過程中，產生了圖形定義的需求。

目次

1 第壹章 緒論	1
第一節 研究動機	2
第二節 研究目的	11
第三節 待答問題	12
第四節 研究限制	13
第五節 名詞界定	14
2 第貳章 文獻探討	18
第一節 VAN HIELE 的幾何思考層次	19
第二節 小學與國中數學的幾何課程	23
第三節 幾何圖形的認知模式	34
第四節 幾何教學的相關文獻	39
第五節 四邊形辨識與包含關係的相關研究	44
3 第參章 研究方法	53
第一節 研究架構	54
第二節 研究對象	59
第三節 研究工具	60
第四節 研究流程	112
4 第肆章 結果與討論	114
第一節 前測評量結果	115
第二節 非典型例性質察覺教學活動實驗	138
第三節 分類教學活動實驗	150
第四節 後測與延後測評量結果	163
第五節 兩種策略的應用討論	203
5 第伍章 結論與建議	210
第一節 結論	211
第二節 建議	216
參考文獻	219
附錄	224

表次

表 2-1 一到九年級與四邊形有關的分年細目	23
表 2-2 特殊四邊形標準名詞解釋	30
表 2-3 日蘇兩地學生認知包含關係比例	51
表 3-3 實驗流程表	112
表 3-4 本研究進度甘梯圖	113
表 4-1 分類組與察覺組後測達層次 1 和 2 的人數表	207

圖次

圖 1-1 特殊四邊形典型例.....	15
圖 1-2 空間中的長方形投影圖.....	16
圖 2-1 康軒小學課本介紹長方形與正方形.....	26
圖 2-2 南一小學課本分類四種圖形.....	27
圖 2-3 翰林小學課本介紹長方形.....	27
圖 2-4 康軒課本介紹四邊形定義的教學活動.....	28
圖 2-5 康軒課本對邊與鄰邊的定義.....	28
圖 2-6 康軒課本正方形的定義.....	28
圖 2-7 康軒課本長方形的定義.....	29
圖 2-8 康軒課本菱形的定義.....	29
圖 2-9 康軒課本平行四邊形的定義.....	29
圖 2-10 康軒課本梯形的定義.....	30
圖 2-11 康軒課本特殊四邊形的性質.....	32
圖 2-12 康軒課本平行四邊形判別性質證明一.....	32
圖 2-13 康軒課本平行四邊形判別性質證明二.....	33
圖 2-14 透過操作圖形探索面積相等.....	38
圖 2-15 雙準則三角形分類圖.....	43
圖 2-16 選出平行四邊形.....	49
圖 2-17 選出長方形.....	49
圖 2-18 選出菱形.....	50
圖 2-19 平行四邊形、長方形、菱形性質判斷.....	50
圖 2-20 正方形、長方形、菱形、平行四邊形包含關係.....	51
圖 2-21 日蘇兩地學生認知途徑.....	52
圖 3-1 單組前後測設計.....	57
圖 3-2 本研究實驗設計.....	57
圖 3-3 照對組的比較方式示意圖.....	58
圖 3-4 正方形預試試題.....	61
圖 3-5 多數作答正方形定義的方式.....	62
圖 3-6 寫出與正方形相關的幾何知識.....	62

圖 3-7 學生所畫的正方形例一.....	62
圖 3-8 學生所畫的正方形例二.....	63
圖 3-9 長方形預試試題.....	63
圖 3-10 標明長方形長寬不等例一.....	63
圖 3-11 標明長方形長寬不等例二.....	64
圖 3-12 學生所畫的長方形例一.....	64
圖 3-13 學生所畫的長方形例二.....	64
圖 3-14 菱形預試試題.....	65
圖 3-15 菱形定義作答方式一.....	65
圖 3-16 菱形定義作答方式二.....	65
圖 3-17 菱形定義作答方式三.....	66
圖 3-18 學生所畫的菱形例一.....	66
圖 3-19 學生所畫的菱形例二.....	66
圖 3-20 學生所畫的菱形例三.....	67
圖 3-21 學生所畫的菱形例四.....	67
圖 3-22 梯形預試試題.....	67
圖 3-23 認為梯形定義是上下底平行.....	68
圖 3-24 梯形定義需要等腰的例子.....	68
圖 3-25 學生所畫的梯形例一.....	68
圖 3-26 學生所畫的菱形例二.....	69
圖 3-27 平行四邊形預試試題.....	69
圖 3-28 學生對平行四邊形定義作答例一.....	69
圖 3-29 學生對平行四邊形定義作答例二.....	70
圖 3-30 學生所畫的平行四邊形例一.....	70
圖 3-31 學生所畫的平行四邊形例二.....	70
圖 3-32 以名稱設計的問題.....	71
圖 3-33 以定義設計的問題.....	71
圖 3-34 名稱版與定義版前測結果.....	72
圖 3-35 名稱版與定義版扣除長方形前測結果.....	73
圖 3-36 前測圖形定義題.....	74
圖 3-37 前測正方形典型例迷思.....	74

圖 3-38 前測正方形空間視覺迷思.....	75
圖 3-39 前測正方形是否為長方形.....	75
圖 3-40 前測長方形空間視覺迷思.....	76
圖 3-41 前測菱形典型例迷思一.....	76
圖 3-42 前測菱形典型例迷思二.....	77
圖 3-43 前測梯形典型例迷思.....	77
圖 3-44 前測平行四邊形與正方形互斥.....	78
圖 3-45 前測平行四邊形與長方形互斥.....	78
圖 3-46 前測平行四邊形與菱形互斥.....	79
圖 3-47 前測圖形判斷是非題.....	79
圖 3-48 前測正方形典型例迷思定義版.....	80
圖 3-49 前測正方形空間視覺迷思定義版.....	80
圖 3-50 前測正方形是否為長方形定義版.....	81
圖 3-51 前測長方形空間視覺迷思定義版.....	81
圖 3-52 前測菱形典型例迷思一定義版.....	81
圖 3-53 前測菱形典型例迷思二定義版.....	82
圖 3-54 前測梯形典型例迷思定義版.....	82
圖 3-55 前測平行四邊形與正方形互斥定義版.....	82
圖 3-56 前測平行四邊形與長方形互斥定義版.....	83
圖 3-57 前測平行四邊形與菱形互斥定義版.....	83
圖 3-58 前測十六個供學生挑選的四邊形.....	84
圖 3-59 前測圖形挑選題內容.....	84
圖 3-60 後測正方形典型例迷思.....	85
圖 3-61 後測正方形空間視覺迷思.....	86
圖 3-62 後測文字敘述正方形是否為長方形.....	86
圖 3-63 後測數字敘述正方形是否為長方形.....	86
圖 3-64 後測長方形空間視覺迷思.....	87
圖 3-65 後測正方形是否為長方形.....	87
圖 3-66 後測菱形典型例迷思.....	87
圖 3-67 後測平行四邊形與正方形互斥.....	88
圖 3-68 後測平行四邊形與長方形互斥.....	88

圖 3-69 後測平行四邊形與菱形互斥.....	89
圖 3-70 後測十五個供學生挑選的四邊形.....	89
圖 3-71 後測配合題內容.....	90
圖 3-72 延後測正方形典型例述思.....	90
圖 3-73 延後測正方形空間視覺迷思.....	91
圖 3-74 延後測文字敘述正方形是否為長方形.....	91
圖 3-75 延後測數字敘述正方形是否為長方形.....	91
圖 3-76 延後測長方形空間視覺迷思.....	91
圖 3-77 延後測正方形是否為長方形.....	91
圖 3-78 延後測菱形典型例述思.....	92
圖 3-79 延後測平行四邊形與正方形互斥.....	92
圖 3-80 延後測平行四邊形與長方形互斥.....	92
圖 3-81 延後測平行四邊形與菱形互斥.....	92
圖 3-82 延後測平行四邊形與菱形互斥.....	93
圖 3-83 延後測十五個供學生挑選的四邊形.....	93
圖 3-84 延後測配合題內容.....	93
圖 3-85 正方形非典型例性質察覺.....	96
圖 3-86 長方形非典型例性質察覺.....	98
圖 3-87 菱形非典型例性質察覺.....	99
圖 3-88 平行四邊形非典型例性質察覺.....	100
圖 3-89 梯形非典型例性質察覺.....	101
圖 3-90 非典型例察覺心得整理.....	102
圖 3-91 分類圖卡與繩子.....	103
圖 3-92 分類準則有沒有四個直角.....	103
圖 3-93 有沒有四個直角分類完成.....	104
圖 3-94 有無四個直角的四邊形命名.....	105
圖 3-95 分類準則有沒有四個等邊.....	105
圖 3-96 有沒有四個等邊分類完成.....	106
圖 3-97 有無四個等邊的四邊形命名.....	106
圖 3-98 分類準則有幾組平行邊.....	107
圖 3-99 幾組平行邊分類完成.....	107

圖 3-100 有幾組平行邊的四邊形命名.....	108
圖 3-101 雙準則分類操作一.....	108
圖 3-102 雙準則分類操作一完成.....	109
圖 3-103 正方形歸屬的討論問題.....	109
圖 3-104 雙準則分類操作二.....	110
圖 3-105 有空格的雙準則分類操作二完成.....	111
圖 3-106 包含關係圖的討論問題.....	111
圖 3-107 無空格的雙準則分類操作二完成.....	111
圖 4-1 前測圖形定義題.....	115
圖 4-2 正方形概念迷思前測結果長條圖.....	116
圖 4-3 長方形概念迷思前測結果長條圖.....	117
圖 4-4 菱形概念迷思前測結果長條圖.....	117
圖 4-5 梯形概念迷思前測結果長條圖.....	118
圖 4-6 平行四邊形概念迷思前測結果長條圖.....	119
圖 4-7 四邊形概念定義正確長條圖.....	120
圖 4-8 前測正方形典型例迷思名稱版.....	120
圖 4-9 前測正方形典型例迷思定義版.....	121
圖 4-10 正方形典型例語意名稱版有迷思而定義版正答長條圖.....	121
圖 4-11 前測正方形空間視覺迷思名稱版.....	122
圖 4-12 前測正方形空間視覺迷思定義版.....	122
圖 4-13 正方形空間視覺名稱版有迷思而定義版正答長條圖.....	123
圖 4-14 前測正方形是否為長方形名稱版.....	123
圖 4-15 前測正方形是否為長方形定義版.....	124
圖 4-16 長方形名稱版有迷思而定義版正答長條圖.....	124
圖 4-17 前測長方形空間視覺迷思名稱版.....	125
圖 4-18 前測長方形空間視覺迷思定義版.....	125
圖 4-19 長方形空間視覺名稱版有迷思而定義版正答長條圖.....	126
圖 4-20 前測菱形典型例迷思一名稱版.....	126
圖 4-21 前測菱形典型例迷思一定義版.....	126
圖 4-22 菱形典型例迷思一名稱版有迷思而定義版正答長條圖.....	127
圖 4-23 前測菱形典型例迷思二名稱版.....	127

圖 4-24 前測菱形典型例迷思二定義版.....	128
圖 4-25 菱形典型例迷思二名稱版有迷思而定義版正答長條圖.....	128
圖 4-26 前測梯形典型例迷思名稱版.....	129
圖 4-27 前測梯形典型例迷思定義版.....	129
圖 4-28 梯形典型例名稱版有迷思而定義版正答長條圖.....	129
圖 4-29 名稱版與定義版正確辨識梯形長條圖.....	130
圖 4-30 前測平行四邊形與正方形互斥名稱版.....	130
圖 4-31 前測平行四邊形與正方形互斥定義版.....	131
圖 4-32 正方形互斥思維名稱版有迷思而定義版正答長條圖.....	131
圖 4-33 前測平行四邊形與長方形互斥名稱版.....	132
圖 4-34 前測平行四邊形與長方形互斥定義版.....	132
圖 4-35 長方形互斥思維名稱版有迷思而定義版正答長條圖.....	132
圖 4-36 前測平行四邊形與菱形互斥名稱版.....	133
圖 4-37 前測平行四邊形與菱形互斥定義版.....	133
圖 4-38 菱形互斥思維名稱版有迷思而定義版正答長條圖.....	134
圖 4-39 名稱版與定義版得分比較長條圖.....	134
圖 4-40 前測圖形判斷是非題.....	135
圖 4-41 正確判斷包含關係長條圖.....	135
圖 4-42 前測十六個供學生挑選的四邊形.....	136
圖 4-43 前測圖形挑選題.....	137
圖 4-44 圖形配合題答對率長條圖.....	137
圖 4-45 正方形非典型例性質察覺.....	139
圖 4-46 長方形非典型例性質察覺.....	139
圖 4-47 菱形非典型例性質察覺.....	140
圖 4-48 平行四邊形非典型例性質察覺.....	140
圖 4-49 梯形非典型例性質察覺.....	141
圖 4-50 非典型例察覺心得整理.....	141
圖 4-51 無效的圖形定義作答.....	142
圖 4-52 正方形非典型例察覺特徵例一.....	143
圖 4-53 正方形非典型例察覺特徵例二.....	143
圖 4-54 正方形非典型例察覺特徵例三.....	143

圖 4-55 長方形非典型例察覺特徵例一	144
圖 4-56 長方形非典型例察覺特徵例二	144
圖 4-57 長方形非典型例察覺特徵例三	144
圖 4-58 菱形非典型例察覺特徵例一	145
圖 4-59 菱形非典型例察覺特徵例二	145
圖 4-60 菱形非典型例察覺特徵例三	145
圖 4-61 平行四邊形非典型例察覺特徵例一	146
圖 4-62 平行四邊形非典型例察覺特徵例二	146
圖 4-63 平行四邊形非典型例察覺特徵例三	146
圖 4-64 梯形非典型例察覺特徵例一	146
圖 4-65 梯形非典型例察覺特徵例二	147
圖 4-66 梯形非典型例察覺特徵例三	147
圖 4-67 非典型例察覺心得整理例一	148
圖 4-68 非典型例察覺心得整理例二	149
圖 4-69 非典型例察覺心得整理例三	149
圖 4-70 分類圖卡與繩子	151
圖 4-71 分類準則有沒有四個直角	151
圖 4-72 有無四個直角的四邊形命名	151
圖 4-73 分類準則有沒有四個等邊	151
圖 4-74 有無四個等邊的四邊形命名	152
圖 4-75 分類準則有幾組平行邊	152
圖 4-76 有幾組平行邊的四邊形命名	152
圖 4-77 雙準則分類操作一	152
圖 4-78 正方形歸屬的討論問題	152
圖 4-79 雙準則分類操作二	153
圖 4-80 包含關係圖的討論問題	153
圖 4-81 有無四個直角的分類紀錄例一	154
圖 4-82 有無四個直角的分類紀錄例二	154
圖 4-83 有無四個直角的分類紀錄例三	154
圖 4-84 有無四個直角命名結果例一	155
圖 4-85 有無四個直角命名結果例二	155

圖 4-86 有無四個等邊的分類紀錄例一.....	156
圖 4-87 有無四個等邊的分類紀錄例二.....	156
圖 4-88 有無四個等邊的分類紀錄例三.....	156
圖 4-89 有無四個等邊命名結果例一.....	157
圖 4-90 有無四個等邊命名結果例二.....	157
圖 4-91 幾組平行邊分類結果例一.....	157
圖 4-92 幾組平行邊分類結果例二.....	158
圖 4-93 幾組平行邊分類結果例三.....	158
圖 4-94 幾組平行邊命名結果例一.....	158
圖 4-95 幾組平行邊命名結果例二.....	159
圖 4-96 雙準則一分類結果例一.....	159
圖 4-97 雙準則一分類結果例二.....	160
圖 4-98 討論問題作答例一.....	160
圖 4-99 討論問題作答例二.....	160
圖 4-100 雙準則二填寫例一.....	161
圖 4-101 雙準則二填寫例二.....	162
圖 4-102 後測正方形典型例迷思分類組.....	163
圖 4-103 後測正方形典型例迷思察覺組.....	163
圖 4-104 延後測正方形典型例迷思分類組.....	164
圖 4-105 延後測正方形典型例迷思察覺組.....	164
圖 4-106 延後測正方形典型例迷思對照組.....	164
圖 4-107 後測正方形典型例迷思答對率長條圖.....	165
圖 4-108 延後測正方形典型例迷思答對率長條圖.....	165
圖 4-109 後測正方形空間視覺迷思分類組.....	166
圖 4-110 後測正方形空間視覺迷思察覺組.....	166
圖 4-111 延後測正方形空間視覺迷思分類組.....	166
圖 4-112 延後測正方形空間視覺迷思察覺組.....	166
圖 4-113 延後測正方形空間視覺迷思對照組.....	166
圖 4-114 後測正方形空間視覺迷思答對率長條圖.....	167
圖 4-115 延後測正方形空間視覺迷思答對率長條圖.....	167
圖 4-116 後測文字敘述正方形是否為長方形分類組.....	168

圖 4-117 後測文字敘述正方形是否為長方形察覺組	168
圖 4-118 延後測文字敘述正方形是否為長方形分類組	168
圖 4-119 延後測文字敘述正方形是否為長方形察覺組	168
圖 4-120 延後測文字敘述正方形是否為長方形對照組	168
圖 4-121 後測文字敘述正方形是否為長方形答對率長條圖	169
圖 4-122 延後測文字敘述正方形是否為長方形答對率長條圖	169
圖 4-123 後測數字敘述正方形是否為長方形分類組	170
圖 4-124 後測數字敘述正方形是否為長方形察覺組	170
圖 4-125 延後測數字敘述正方形是否為長方形分類組	170
圖 4-126 延後測數字敘述正方形是否為長方形察覺組	170
圖 4-127 延後測數字敘述正方形是否為長方形對照組	170
圖 4-128 後測數字敘述正方形是否為長方形答對率長條圖	171
圖 4-129 延後測數字敘述正方形是否為長方形答對率長條圖	171
圖 4-130 後測長方形空間視覺迷思分類組	172
圖 4-131 後測長方形空間視覺迷思察覺組	172
圖 4-132 延後測長方形空間視覺迷思分類組	172
圖 4-133 延後測長方形空間視覺迷思察覺組	172
圖 4-134 延後測長方形空間視覺迷思對照組	172
圖 4-135 後測長方形空間視覺迷思答對率長條圖	173
圖 4-136 延後測長方形空間視覺迷思答對率長條圖	173
圖 4-137 後測正方形是否為長方形分類組	174
圖 4-138 後測正方形是否為長方形察覺組	174
圖 4-139 延後測正方形是否為長方形分類組	174
圖 4-140 延後測正方形是否為長方形察覺組	174
圖 4-141 延後測正方形是否為長方形對照組	175
圖 4-142 後測正方形是否為長方形答對率長條圖	175
圖 4-143 延後測正方形是否為長方形答對率長條圖	176
圖 4-144 後測菱形典型例迷思分類組	176
圖 4-145 後測菱形典型例迷思察覺組	176
圖 4-146 延後測菱形典型例迷思分類組	177
圖 4-147 延後測菱形典型例迷思察覺組	177

圖 4-148 延後測菱形典型例述思對照組	177
圖 4-149 後測菱形典型例述思答對率長條圖	178
圖 4-150 延後測菱形典型例述思答對率長條圖	178
圖 4-151 後測平行四邊形與正方形互斥分類組	179
圖 4-152 後測平行四邊形與正方形互斥察覺組	179
圖 4-153 延後測平行四邊形與正方形互斥分類組	179
圖 4-154 延後測平行四邊形與正方形互斥察覺組	179
圖 4-155 延後測平行四邊形與正方形互斥對照組	180
圖 4-156 後測平行四邊形與正方形互斥答對率長條圖	180
圖 4-157 延後測平行四邊形與正方形互斥答對率長條圖	181
圖 4-158 後測平行四邊形與長方形互斥分類組	181
圖 4-159 後測平行四邊形與長方形互斥察覺組	181
圖 4-160 延後測平行四邊形與長方形互斥分類組	182
圖 4-161 延後測平行四邊形與長方形互斥察覺組	182
圖 4-162 延後測平行四邊形與長方形互斥對照組	182
圖 4-163 後測平行四邊形與長方形互斥答對率長條圖	183
圖 4-164 延後測平行四邊形與長方形互斥答對率長條圖	183
圖 4-165 後測平行四邊形與菱形互斥分類組	184
圖 4-166 後測平行四邊形與菱形互斥察覺組	184
圖 4-167 延後測平行四邊形與菱形互斥分類組	184
圖 4-168 延後測平行四邊形與菱形互斥察覺組	184
圖 4-169 延後測平行四邊形與菱形互斥對照組	185
圖 4-170 後測平行四邊形與菱形互斥答對率長條圖	185
圖 4-171 延後測平行四邊形與菱形互斥答對率長條圖	186
圖 4-172 後測平行四邊形與菱形互斥分類組	186
圖 4-173 後測平行四邊形與菱形互斥察覺組	186
圖 4-174 延後測平行四邊形與菱形互斥分類組	187
圖 4-175 延後測平行四邊形與菱形互斥察覺組	187
圖 4-176 延後測平行四邊形與菱形互斥對照組	187
圖 4-177 後測平行四邊形與菱形互斥答對率長條圖	188
圖 4-178 延後測平行四邊形與菱形互斥答對率長條圖	188

圖 4-179 後測正方形配合題分類組.....	189
圖 4-180 後測正方形配合題察覺組.....	189
圖 4-181 延後測正方形配合題分類組.....	190
圖 4-182 延後測正方形配合題察覺組.....	190
圖 4-183 延後測正方形配合題對照組.....	191
圖 4-184 後測長方形配合題分類組.....	191
圖 4-185 後測長方形配合題察覺組.....	192
圖 4-186 延後測長方形配合題分類組.....	192
圖 4-187 延後測長方形配合題察覺組.....	193
圖 4-188 延後測長方形配合題對照組.....	193
圖 4-189 後測菱形配合題分類組.....	194
圖 4-190 後測菱形配合題察覺組.....	194
圖 4-191 延後測菱形配合題分類組.....	195
圖 4-192 延後測菱形配合題察覺組.....	195
圖 4-193 延後測菱形配合題對照組.....	196
圖 4-194 後測梯形配合題分類組.....	196
圖 4-195 後測梯形配合題察覺組.....	197
圖 4-196 延後測梯形配合題分類組.....	197
圖 4-197 延後測梯形配合題察覺組.....	198
圖 4-198 延後測梯形配合題對照組.....	198
圖 4-199 後測平行四邊形形配合題分類組.....	199
圖 4-200 後測平行四邊形形配合題察覺組.....	199
圖 4-201 延後測平行四邊形形配合題分類組.....	200
圖 4-202 延後測平行四邊形形配合題察覺組.....	200
圖 4-203 延後測平行四邊形形配合題對照組.....	201
圖 4-204 後測配合題答對率長條圖.....	201
圖 4-205 延後測配合題答對率長條圖.....	202
圖 4-206 前測層次 1 學生比例圓餅圖.....	206
圖 4-207 前測層次 2 學生比例圓餅圖.....	206
圖 4-208 包含關係的起點比較長條圖.....	208
圖 4-209 分類組測驗可比較題答對率長條圖.....	208

圖 4-210 察覺測驗可比較題答對率長條圖	209
圖 5-1 學校課程四邊形辨識學習流程圖	213
圖 5-2 分類策略四邊形辨識學習流程圖	214
圖 5-3 非典型例性質察覺學習流程圖	215

第壹章 緒論

緒論總共有五個小節，第一小節的研究動機中，說明研究者對於四邊形辨識問題，從覺得不重要到認為很有價值的轉變歷程，以及為何提出分類策略，與非典型例性質察覺策略，並且希望應用這兩種教學策略，改善國中生的四邊形辨識能力。

第二小節的研究目的中，研究者欲進行教學實驗，探究分類教學策略，與非典型例性質察覺教學策略的應用，並探討四邊形辨識由視覺期進入分析期的關鍵因素。

第三小節的待答問題中，研究者提問教學活動改善辨識迷思的成效？依據圖形定義來挑選四邊形，正確率較高的現象，是否發生於實驗班級？兩種教學策略能否改善辨識迷思？在圖形辨識時，學生如何從特殊化到一般化？

第四小節的研究限制中，研究者告知實驗對象挑選的限制，教學活動設計的限制，以及測驗問卷使用的限制。

第五小節的名詞界定中，定義了本研究的典型例、空間視覺、語意、互斥思維四種四邊形辨識迷思類型，以及分類、非典型例性質察覺兩種教學策略。

第一節 研究動機

人類天生對數量具有感覺，也對於各種形狀有辨識的能力，在文明演進的歷程中，由此天賦本能逐漸架構算術、幾何的基礎知識，經過幾千年眾人智慧的累積，形成至今的數學。

研究者認為，小學時期數學學習的規劃，主要以此天賦本能為基礎，將學生的初等直覺有系統的延伸為數學知識，這些數學知識，到國中階段，成為國中數學內容的基本工具，所以小學的數學內容，大多數是非常能夠與具體生活經驗結合的。

隨著學習數學時深度的增加，學生所面對的內容，也會由具體逐漸變得抽象，國民小學階段的幾何學習歷程，就是很好的例子，低年級的時候，由日常生活空間中的實體，萃取出平面圖形的概念，中年級的時候，探討平面圖形的組成結構，高年級的時候，再由組成元素的分析，學習平面圖形的性質。

所以關於特殊四邊形的幾何題材，雖然遍佈於小學數學，但到了高年級的課程，才會以定義的形式，來介紹正方形、長方形、菱形、梯形、平行四邊形，此刻，『正方形也算是長方形』，這個與生活經驗相違背、與中低年級所學不呼應的概念，首次於教材中被強調。

在國中數學題材的特殊四邊形，有一部份討論的是正方形、長方形、菱形、梯形、平行四邊形彼此之間的包含關係，另一部份則以四邊形圖形，介紹一些延伸的幾何性質以及進行推理，其中的主角是平行四邊形。

國中數學課程對於四邊形的教學重心，偏重於以平行四邊形來架構數學內容，九年一貫能力指標的分年細目中，此部分總計就有

8-s-19、8-s-23、8-s-24、8-s-25 共四條，近幾年度各版本的教科書，多半也以一個完整的章節介紹，而對於正方形、長方形、菱形、梯形、平行四邊形彼此之間的包含關係，於課本中佔據的份量，就相對低很多，通常是一到兩頁。

特殊四邊形的辨識，在許多研究者同事（國中數學教師）的心目中，並不認為這是一個很困難的題材，內容不複雜，難度相對簡單，而學生容易有的一些辨識迷思現象，例如『正方形不是長方形』，老師們知道此現象存在於學生心中，但往往不太重視。

研究者與同事聊到這個現象時，發現老師們不重視的原因，主要是認為學生應該在小學時，就要會辨識四邊形了，無法正確辨識的學生比例應該不高，國中的數學課程繁重，辨識四邊形的問題，在基本學力測驗也不會考，再者，能否正確辨識四邊形，對於國中幾何的學習，好像也不重要。

至於特殊四邊形彼此之間的包含關係，同樣被認為是複雜度不高，也算好教的題材，大致上的作法，就是告訴學生正方形、長方形、菱形、平行四邊形的圖形定義後，老師講述推導出彼此之間的包含關係，然後便認為學生應該理解了。

就讀師大數學系三年級時，研究者參與陳創義老師所主持的國科會計劃研究小組，開始接觸「青少年的幾何概念」的數學教育議題，大學畢業後實習完，擔任國中數學教師即將滿五年，長期接觸青少年幾何概念的研究，至今是第八年，在這段時間中，研究者的角色一直在轉換，從數學系的大學生、國中實習教師、專職的國中正式教師、帶職的數學教育研究生，參與此議題的方式與心態，對於這個議題的看法與觀點，也一直在轉變與成長。

先從研究者所參與的國科會計劃談起，在 89 年度～91 年度的

「青少年的幾何形狀概念發展研究」計畫中，當時研究小組的重心在探詢青少年的幾何圖形辨識迷思，結果發現形態有四種：語意、典型例、互斥思維、空間視覺。

什麼是語意帶來的迷思呢？例如在日常生活語言的使用上，長方形的「長」字，會讓學生覺得長方形必須長長的，所以會帶來認為長方形必須要相鄰兩邊不等長，不包含正方形的迷思，而銳角三角形的「銳」字，在生活用語中表示尖銳，所以學生會認為銳角三角形，就是有一個尖尖的角的三角形。

在數學中，判斷長方形與銳角三角形，依據的是幾何性質，並非日常生活用語，長方形指得是有四個直角的四邊形，銳角三角形指得是三個角都是銳角的三角形，銳角指得是小於 90 度的角，但學生的判斷依據並不是這些幾何性質，卻是日常生活用語中對於長方形、銳角三角形的字義解讀，所以就會產生語意造成的圖形辨識迷思。

典型例帶來的迷思，指得則是老師在教學過程中，常列舉的圖形例子，課本教材中，常出現的範例圖形，所具有非圖形定義的共同特徵，例如老師在教正方形的時候，所畫的正方形方位都是擺成正的（一組對邊為水平線，另一組對邊為鉛直線），課本上的正方形方位也是擺成正的，那麼在學生的概念心像中，認為正方形，方位一定要是正的。

雖然在圖形定義上，沒有要求正方形的方位是擺成正的，這並不是正方形的必要條件，而是典型例圖形所共有的充分條件，這種依據典型例心像，而不是依據此圖形的幾何性質來判斷，以致於在非典型例的圖形，產生辨識上的錯誤，稱為典型例造成的圖形辨識迷思。

互斥思維迷思，指得是在面對圖形辨識問題時，學生會忽略了彼此之間的包含關係，認為正方形、長方形、菱形、梯形、平行四邊形彼此的地位是相等的，讓每一圖形最多只歸於一類，產生諸如此圖形已經是長方形了，就不能是平行四邊形的迷思。

有部份具有互斥思維迷思的學生，在辨識圖形時，不會保持一貫性，可能在其它場合，只挑一種時，也許會選取它，一起挑時，卻排除它。學生會有認為『正三角形不是等腰三角形』、『正三角形不是銳角三角形』、『長方形不是平行四邊形』、『正方形不是平行四邊形』、『菱形不是平行四邊形』、『正方形不是菱形』等的現象，背後的原因都有可能是互斥思維。

空間視覺的迷思，指得是學生在辨識圖形時，將此圖形在三維空間所看到的樣子，投影在二維平面時的形狀，亦認為是這個圖形，例如學生可能認知桌子是長方形，但三維空間中，桌子映入眼簾的投影形狀，其實是平行四邊形，所以學生就會將接近常見長方形投影圖的平行四邊形，認為是長方形。

延續 89 到 91 年度的研究結果，93 到 95 年度「青少年幾何形狀概念的『學習與教學』之研究」的計畫，研究小組以語意、典型例、互斥思維、空間視覺這些辨識迷思型態的研究發現為基礎，重心是思考如何設計教學活動，來有效的改善這四種圖形辨識迷思型態，且進而將教學活動整合，希望能夠發展合適的教學模組套件，來針對各種基本幾何圖形的辨識迷思，予以有效的改善提升。

在 93 到 95 年度的初期，所發展的解決策略偏向局部性，研究小組成員，提出了許多的教學方法，並且設計教學活動，但是一個教學活動，通常只針對少部分的迷思問題，並沒有整體考慮，針對整體圖形（例如各個種類的三角形、全部的特殊四邊形）的辨識做

全局的教學。

這些改善迷思概念的教學活動，顯得很零散而且沒有系統，進行小型教學實驗的結果雖然有效，但是將其整合起來，若在中學教學現場實行，就會很像一連串的教學小技巧提醒，成果是點的突破，而非全面性的提升。

到了「青少年幾何形狀概念的『學習與教學』之研究」計畫中期，陳創義老師提出了數學的分類概念教學，並以分類教學的理念，設計了三角形分類教學套件，此組教學套件，經過實際教學實驗改良後，在改善國中學生三角形圖形辨識的迷思，獲得一些成果，從各種證據顯示，在教學現場，具有實際應用的可行性，。

這一系列的研究結果，也發表在 2007 年的 7 月 8 日到 13 日於韓國首爾所舉辦的，第三十一屆國際數學教育心理學年會（The 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME 31）。分類的教學概念，為青少年的圖形辨識迷思改善的議題上，提供了一個可行且具整體性的解決架構。

在三角形分類教學套件的成型過程中，研究者參與了多次陳創義老師主持的小組討論，十數次的小型問卷，與若干自己任教學生非正式訪談，並實際執行了三次正式的教學實驗，從研究過程中得到了豐富的經驗與充實的收穫。

回到四邊形辨識這個議題，關於四邊形辨識的數學題材，在小學以及國中數學教材中，依照國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域的劃分，在第一到第四學習階段都有出現。

第一階段（一至三年級）的數學課程中，設定學生在 Van Hiele 幾何認知層次處於層次 0 的視覺期，所以給予大量的具體實

物操作、觀察、描述與比較，第一階段的正方形與長方形是依據生活經驗來介紹的，並不去碰觸到正方形與長方形包含關係的問題，所以課程內容的編寫方式，容易造成學生認為長方形必須要長、寬不相等。

第二階段（四至五年級）時，才會設定學生會踏入幾何認知層次中的層次 1 的分析期，此刻引入邊、角、頂點這些四邊形的構成要素，到了第三階段（六至七年級），就會正式介紹長方形、正方形、菱形、平行四邊形、梯形，以及辨別各種特殊四邊形的性質，和所延伸出彼此之間的關係，第四階段（八至九年級）的數學課程，則進一步從各種四邊形的定義出發，以這些幾何圖形的性質為基準，來探討彼此之間的包含關係。

從 89 到 91 年度的「青少年的幾何形狀概念發展研究」計畫，曾進行全國抽測，結果顯示，對於各種四邊形圖形的辨識問題，七、八年級的學生能夠完全正確回答的比例很低，不到 15%，九年級稍微好一點，約在 27%，這表示了國中學生光是執行辨識四邊形圖形，出錯的比例就很高，更不用說更進一步的性質判斷與包含關係。

當時這個結果給研究者很大的衝擊，本來研究者和自己未來的同事一樣，認為，特殊四邊形的辨識，與圖形之間的包含關係，是很簡單的數學內容，小學的時候早就該會了，縱使有些人不會，比例上應該不高。可是對國中學生而言不簡單，他們有許多自己覺得很自然，但錯誤的辨識判斷方式，人數比例還相當高。

其後研究者進入國中教學現場教書，常常以四邊形圖形辨識問題為題材，設計成各個樣式的小型問卷，來測試任教的班級，反覆應證了這個結果，國中學生對於四邊形圖形辨識，覺得不困難，回

答的結果卻錯誤百出。

從小學一年級到國中九年級，都有學生認為正方形不可以是長方形，長方形就是要長跟寬不相等，而這個現象，也一再得出現於研究者所設計的各式小型問卷結果中。

某次靈光乍現，研究者突然有個想法，如果只是要學生挑選出有四個直角的四邊形，而非要學生挑選出長方形，那麼這個時候學生會不會將正方形給選了進去？其他的四邊形，在只給定義去挑選時，學生的表現跟給名稱來挑選圖形，結果有何不同？

於是研究者依此想法，設計了兩個版本的四邊形辨識問卷，將所任教的一個七年級班級，拆成奇數座號與偶數座號兩個大組，其中一個版本的設計問題，是要學生辨識正方形、長方形、菱形、平行四邊形、梯形。

另一個版本的題目都相同，但是將特殊四邊形的名稱換成定義，也就是要學生辨識四個直角而且四個邊等長的圖形、有四個直角的圖形、四個邊等長的圖形、只有兩個邊平行的圖形、有兩組對邊平行的圖形，測驗的結果，五個特殊四邊形，學生在定義版問卷的正確率明顯高過名稱版問卷。

如果，學生依據特殊四邊形的定義來辨識圖形，反而比依據名稱辨識來得好，這是不是顯示了，特殊四邊形的名稱，對於學生辨識圖形，是一個負向影響的因子，為什麼會產生這個現象呢？能夠利用這個現象來幫助學生辨識特殊四邊形嗎？

經過六七年的轉變與成長，研究者認為，能夠正確的辨識特殊四邊形，與瞭解特殊四邊形之間的包含關係，並不是一個國中學生已經學習的很好，簡單、好教而且不重要的題材。擁有瞭解並依據定義，來辨識四邊形的能力，是學生進而學習深入幾何知識、敘述

推理的基礎。

國中數學教師往往有一種無力感，就是隨著年級的增長，放棄學習數學的學生比例越來越高，關於國中學生辨識特殊四邊形表現不佳這個現象，給了研究者一個省思，就是老師視為理所當然的基礎知識，對學生來說，其實存在很多迷思現象，這就好像在根基不穩固的情況下，猛在上面蓋高樓大廈，不是一個良好的教學現況。

青少年幾何形狀概念的『學習與教學』研究計畫，在改善圖形辨識迷思部分，重心在三角形，研究計畫設計了三角形辨識的分類教學套件，應用於教學現場，有了一些成果。

而四邊形圖形辨識，在國中數學是個很好的題材，所以研究者希望，自己能夠為以分類概念教學為主軸，利用過去參與三角形分類教學套件的研究心得，於現有的基礎上，設計四邊形分類教學活動，且實際應用於國中教學現場，改善四邊形辨識迷思，幫助理解特殊四邊形的包含關係。

文獻顯示，典型例迷思類型，是基本圖形學習迷思的主要癥結，在有效改善典型例所造成的迷思後，就能夠大幅改善基本圖形的辨識困難，而破除典型例迷思的主要方向，是要讓學生經驗足夠的非典型例。

依據研究者的教學經驗，經驗非典型例的方式，若單純的在進行教學的時候，列舉出基本圖形的非典型例，以此來告知學生，不能夠僅用典型例來思考問題，此刻，學生是處於被動接受的地位，成效並不好。

比較恰當的作法，應該讓學生站在主動探索的學習地位，經過觀察思考後，察覺非典型例基本圖形的共通性質，再將此共通性質連結到圖形定義，而後學生會發現，基本圖形的辨識，要依據的是

圖形定義，而非圖形的典型例，研究者將此概念，稱之為非典型例性質察覺。

研究者希望，能夠以從自身教學經驗中，所體悟到的非典型例性質察覺教學觀點，為核心的教學概念，整理出非典型例性質察覺教學策略，並且著手撰寫與實驗教學活動。

教學活動，會讓學生從諸多非典型例的圖形中，觀察紀錄且經過討論後，形成特殊四邊形的正確概念定義，然後以此概念定義來辨識特殊四邊形，與瞭解圖形之間的包含關係。

另一方面，研究者將思考，學生依據定義辨識圖形，比依據名稱表現來得好，是一個普遍的現象，還是碰巧發生在那個班級的特例，如果這是普遍的現象，研究者會思考如何與兩種教學活動結合。

分類教學策略，與非典型例性質察覺教學策略，若兩者均能夠幫助學生，來改善四邊形辨識的迷思，背後所代表的意義，不僅僅是學生能夠無誤的認出正方形、長方形、菱形、平行四邊形、梯形。

而是學生在四邊形辨識的題材，從 Van Hiele 幾何認知層次中層次 0 的視覺期，提升至層次 1 的分析期，並且在包含關係的部分，擁有一些層次 2 非形式演繹期的經驗。

幾何認知層次的提升體驗，對於往後八九年級時，九年一貫數學領域第四階段的學習，是很有幫助的，這是研究者探討分類教學策略，與非典型例性質察覺教學策略，應用於特殊四邊形辨識的議題，所希望達成的最終目標。

第二節 研究目的

鑒於以上的研究動機，本研究主要目的為：

一、探究分類教學策略的應用

以陳創義提出的分類教學概念為策略，三角形分類教學活動為基礎，依據研究者的實務教學經驗，參與國科會計畫的研究心得，設計特殊四邊形辨識的分類教學活動，並且實際實驗於教學現場，藉由前測、後測、延後測的量化資料，以及實驗者教學歷程的質化資料，分析教學活動的結果，探討如何應用分類教學策略於教學現場。

二、探究非典型例性質察覺教學策略的應用

將非典型例性質察覺的教學觀點，整理成教學策略，並依據研究者的實務教學經驗與文獻資料，設計特殊四邊形辨識的非典型例性質察覺教學活動，並且實際實驗於教學現場，藉由前測、後測、延後測的量化資料，以及實驗者教學歷程的質化資料，分析教學活動的結果，探討如何應用非典型例性質察覺教學策略於教學現場。

三、以本研究為例探討四邊形辨識由視覺期進入分析期的關鍵因素

研究者希望，在實務上獲得兩種教學策略的應用經驗後，以此經驗歷程，探討在四邊形辨識問題上，學生在 Van Hiele 幾何認知層次，由視覺期進入分析期，提升的核心關鍵因素。

第三節 待答問題

根據研究目的，研究者提出四個待答問題：

一、根據圖形定義辨識四邊形，比根據圖形名稱辨識四邊形正確率高的現象，是否存在於實驗的學生當中？若存在的話原因為何？如何縮減此差距？

二、分類教學策略，是否改善了四邊形圖形的辨識迷思？

三、非典型例性質察覺教學策略，是否改善了四邊形圖形的辨識迷思？

四、在四邊形圖形辨識上，如何讓學生從特殊化過度到一般化？也就是從依據輪廓判斷，存在各種迷思現象，到擁有圖形定義的概念，能夠理解在判斷圖形時，需要依據定義的內容，並且能瞭解正確的四邊形定義。

第四節 研究限制

一、研究對象範圍

本研究對象僅限於台北市某市立國中的七年級，並非隨機抽樣，無法代表整個母群，研究結果不宜作過度推論。

二、教學活動設計

研究者依據分類教學策略、與非典型例性質察覺教學策略，所設計的教學活動，均為研究者根據各式研究文獻資料、自身對於這兩個教學策略的理解、個人教學經驗，所設計的教學活動，而在設計時，實驗學校學生程度亦為研究者考量重心，所以這兩份教學活動，有因校制宜的侷限性。

三、前測試題使用

前測試題設計取向為診斷式評量，不宜作為總結性評量使用。

第五節 名詞界定

四邊形辨識迷思的類型

一、典型例類型

對於各種四邊形，在學生概念心像中，首先且隨即聯想到的幾何圖形形狀，稱之為典型例，不一定每一個圖型都有典型例存在，但幾乎大部分的學生腦海中，都有自己的正方形、長方形、菱形、平行四邊形、梯形典型例。

典型例類型，指得是學生不明白典型例只是代表一部分的例子，而以自己腦海中的典型例圖形，來代表所有的圖形，在進行四邊形圖形辨識時，以所辨識圖形是否接近典型例圖像，作為主要的判斷依據，進而產生的辨識錯誤。

在學習認識各種幾何圖形時，大部分教學者以及教材中，最常拿來作為說明講解介紹的典範圖形，很容易形成為學生概念心像中，此圖形的典型例。除了學校老師課程中的教學，以及課本教材外，由於四邊形隨處可見於日常生活中，所以四邊形典型例心像，也會來自於學生個人的生活經驗。

本研究將認為正方形、長方形、平行四邊形、梯形的圖形方位，必須要是水平擺放，菱形的圖形方位，必須要有一條對角線是水平擺放，如圖 1-1，歸類為典型例的迷思類型。

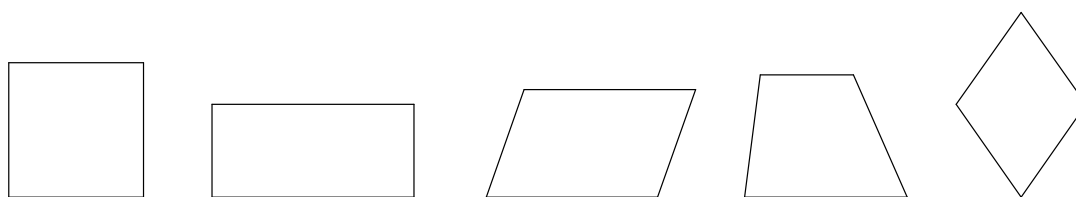


圖 1-1 特殊四邊形典型例

二、空間視覺類型

學生生活於三維空間中，舉目所見皆為立體的事物，平面也是三維空間的一部份，歐氏幾何在探討圖形時，對於平面有嚴謹的定義，數學課程中的正方形、長方形、菱形、平行四邊形、梯形，指的都是二維空間中的平面圖形。

但是在日常生活中，學生接觸這些四邊形時，映入眼簾的，往往是由三維空間投影到二維平面的幾何圖形，再加上利用二維平面展現三維空間的各種例子隨處可見，例如報章、雜誌、書籍裡的三維示意圖，呈現在電腦平面螢幕上的 3D 遊戲，所以現實生活中，歐氏幾何的二維平面並不是那麼自然。

空間視覺類型，指的是學生在進行四邊形圖形辨識時，不以歐氏幾何所定義的二維平面為準，能夠接受此四邊形在三維空間中，所呈現的投影形狀，認為此形狀也可以代表這個四邊形，如圖 1-2，認為此圖也是長方形，因此造成圖形辨識上的錯誤。

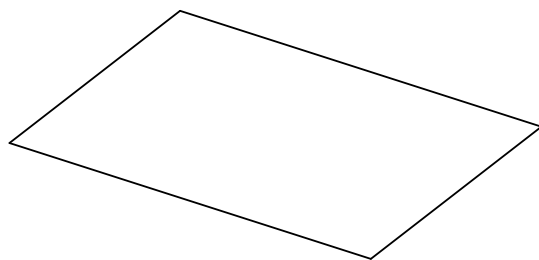


圖 1-2 空間中的長方形投影圖

三、語意類型

數學中，辨識幾何圖形，所依據的是圖形的定義，我們會根據圖形的特性，參考日常語言的意義，給定幾何圖形名稱，通常一個幾何圖形的名稱，是能夠與日常語言結合，來幫助學生增進對此圖形的瞭解。

但有些時候，幾何圖形的名稱，反而會造成認識這個幾何圖形的障礙，有可能是日常語言對於圖形名稱的字面解讀，與闡述圖形定義的數學語句並不相符，或者在生活經驗中，此名稱泛指某類特定圖形，且非完全為在數學世界中，所指定的圖形。這些由日常語言帶來的圖形類型，我們稱為語意類型。

在四邊形辨識，常出現的語意迷思，是認為長方形是長的，所以長方形的長、寬不能相等，以及正方形是正的，所以必須有一個邊是水平線。

四、互斥思維類型

一個幾何圖形，只要符合定義，它可以有若干個名稱，例如每一個長方形都符合了平行四邊形的定義，所以每一個長方形也都是平行四邊形，由四邊形的定義出發，介紹正方形、長方形、菱形、

平行四邊形、梯形彼此之間的包含關係，是九年一貫數學課程第四階段（八、九年級）重要的教學內容，可以為高中時學習集合概念作為墊步。

有一部份的學生會認為，正方形、長方形、菱形、平行四邊形、梯形這些圖形，彼此的地位是相等的，而且不可以互相歸屬，例如一個圖形已經是長方形了，那麼這個圖形就是長方形，不可以也是平行四邊形，像這樣認為一個圖形只能有一個名稱，所造成的圖形辨識迷思，本研究歸類為互斥思維類型。

兩種教學策略

五、 分類教學策略

在數學的分類過程中，很重要的基礎要件是明確的分類準則，分類教學策略，是依據準則對圖形進行分類，並在操作分類準則時，明辨屬性，同時也著重性質的強調，幫助概念的釐清。

六、 非典型例性質察覺教學策略

典型例是基本幾何圖形辨識的主要迷思，經驗非典型例，是破除典型例迷思的有效方法，非典型例性質察覺教學策略，是從大量的非典型例圖形中，觀察共同的特徵，以此連結至圖形定義，進而瞭解辨識圖形時，要依據圖形定義，而不是依據典型例。

第貳章 文獻探討

文獻探討共有五個小節，第一小節探討 van Hiele 的幾何思考層次，幾何思考層次是一個有效且清楚，用來描述學生幾何學生程度的方式。

第二小節探討小學與國中數學的幾何課程，因為研究對象為國中七年級，故確認學生在小學時期的數學知識背景相當重要，本節將就九年一貫數學課程中，學生在小學時，四邊形的學習架構，進行完整了解，並介紹後續八九年級的四邊形相關課程。

第三小節探討幾何圖形的認知模式，Vinner 的概念心像與概念定義，可用來分析學生的數學抽象概念運作；Duval 的幾何圖形瞭解，認為學生認知幾何圖形時，有知覺性、序列性、論述性、操作性四種方式。

第四小節探討幾何教學的相關文獻，其中有 van Hiele 的幾何思考學習階段，這是為了促使學生，從一個思考層次，提升到較高層次，所提出來的的方法，與分類教學概念，數學上的分類概念，在界定範圍及分類準則後，在圖形辨識上，對於概念的釐清是有幫助的，並介紹三角形分類教學套件的應用，與教學實驗的成果。

第五小節探討四邊形辨識與包含關係的相關研究，以近年的碩博士論文，關於四邊形辨識的國內研究，為本研究提供經驗性的研究成果與資料，還有日本與蘇格蘭兩地的包含關係比較研究，研究對象為 2006 年日、蘇兩地學生，內容是比較四邊形包含概念成型的方法與結論。

第一節 Van Hiele 的幾何思考層次

根據 van Hiele (1986) 的理論，學生的幾何思考，可以分為五個層次。本研究中，將採用 van Hiele 的用法及其名詞，分別將這五個層次，稱之為層次 0 的視覺期、層次 1 的分析期、層次 2 的非形式演繹期、層次 3 的形式演繹期、以及層次 4 的嚴密期。以下分別敘述這五個層次的主要特色：

層次 0：視覺期 (Visual)

屬於這個層次的學生，只從各種實體物的外形輪廓來辨認圖形。舉例來說，若由生活經驗中認識到長方形是瘦瘦長長的，圓形是圓圓的，正方形要擺的正正方方的，那麼此階段的學生就會認為，看起來瘦瘦長長的就是長方形，看起來圓圓的就是圓形，所以門的形狀是長方形，太陽的形狀是圓形，而正方形擺成◇，看起來不像正方形時，就會認為這不是正方形。

處在層次 0 的學生，僅依賴視覺外觀上的圖形感受。只要在圖形外表特徵差異稍大時，就不會將長方形看成正方形；或將橢圓形看成圓形。這個層次的學生可以使用非數學的術語，知道各種圖形，但是卻無法了解這些圖形的實際意義。若要層次 0 的學生回答辨識圖形的理由為何，他們常使用的辭彙為，看起來是、感覺上是。

層次 1：分析期 (Analytic)

這個層次的學生，已經具有辨別圖形特徵的能力，他們能利用視覺，來觀察到組成圖形的構成要素（例如：頂點、邊、角）與這

些要素之間的關係，以此分析幾何概念。所以，能夠察覺到圓形沒有邊，正方形有四個邊，而且每邊都相等，三角形有三個角，三個邊。

學生會藉由組成元素的名稱，和組成元素之間的關係來分析圖形。同時，依其經驗建立同一類圖形所具有的特性，並且運用圖形之特性來解決問題。但他們卻無法說明這些圖形特徵之間有何關係存在。例如：菱形、正方形、平行四邊形、長方形、梯形這些特殊四邊形彼此之間有何關係，不一定能夠知道正方形與長方形雖然都有四個邊，當這兩個圖形邊長不相等時，面積可能相等。也就是說，此層次的學生尚無法經由推理而知悉其道理何在。

層次 2：非形式演繹期 (Abstract)

這個層次的學生，不但能夠了解、掌握、運用構成圖形的各種要素，並且能夠進一步根據圖形性質形成定義，並且瞭解各圖形之間的包含關係，能做非正式的辨證，但還不能夠作有系統的証明。例如，他們可以理解到，平行四邊形的兩雙對邊相等，長方形是平行四邊形的一種，當平行四邊形其中一角為 90° 時，這個四邊形就是長方形。又如，任何多邊形的外角和皆為 180° ，多邊形的內角和為 $180^\circ \times (n-2)$ ，並將此知識套用在四邊形上。

非形式演繹期的學生，可以開始建構特殊四邊形之間的關係，使用公式表示與使用定義，來整理先前發現的正方形、長方形、菱形、平行四邊形、梯形性質，給一個非正式的討論，並跟著給一個演繹上的討論，卻無法形成一個有系統的証明，例如他們不明白國中幾何知識使用的，是歐氏幾何中的二維平面，其中有一些無定義名詞、基本定義，也不懂如何在其上假設，以及架構定理，所瞭解

的這些特殊四邊形的相關知識，在這個歐氏幾何的系統中，是怎麼來的？處在哪個位置？

層次 3：形式演繹期 (Deduction)

這個層次的學生能夠經由抽象推理的過程，來證明各種幾何問題，同時能夠知道證明的方法不只一種。換言之，學生不必靠記憶公式來證明幾何問題。此外，他們能夠理解幾何問題之解決，必須具備的充分或必要條件。例如：不必透過拿實體物來操作，就能夠證明畢氏定理。當然，這個層次學生明確的知道菱形也是長方形，又是正方形，理解這個事實是在定義下所得到的結果，能用邏輯推理的方法，來證明幾何的性質。

層次 4：嚴密期 (Rigor)

這個層次是屬於最高層次，達到這個層次的學生，能夠在不同的公設體系中，建立定理並且分析、比較包括非歐幾何，或者比較不同公設系統，同時也能夠了解抽象的幾何概念。在此層次的學生，能學習不同的幾何公設系統，了解抽象推理幾何，並能互相比較不同公設系統。

根據 van Hiele 的實証研究顯示，人類幾何概念的發展，在上述這五個層次有其次序性，學習者必須具有前一層次的各項概念與能力，其中的技能和策略都有充分的了解，教師才能夠進行更高一層次的幾何教學活動，而各層次與年齡不一定具有相關。但大體來說，小學低年級學生，其幾何程度大都屬於層次 0，因此，學生必

須透過大量實體物的操作，比較、拼湊或推疊，在實際經驗之後，教師才能夠循序漸進，教導學生逐漸達到更高的層次。

陳創義（2005）在我國青少年幾何學習概念的研究計劃中，以全國抽測的方式調查發現，國中學生在特殊四邊形辨識的幾何能力表現上，大多數的七、八年級學生仍然停留在層次 0。

第二節 小學與國中數學的幾何課程

雖然特殊四邊形處處可見，存在於學生的日常生活中，但學校的課程內容，對於學生腦海中特殊四邊形概念的成形，也是相當重要的一環，本節將探討國內小學與國中的數學課程，如何安排四邊形這個題材。

首先從課程綱要中的分年細目，來探討課程內容安排的架構，列出小學一到九年級中，與特殊四邊形這個數學題材有相關的細目內容，於表 2-1。

表 2-1 一到九年級與四邊形有關的分年細目

一年級
1-s-02 能辨認、描述與分類簡單平面圖形與立體形體。
二年級
2-s-01 能認識周遭物體上的角、直線與平面（含簡單立體形體）。
2-s-02 能認識生活周遭中水平、鉛直、平行與垂直的現象。
三年級
3-s-01 能認識平面圖形的內部、外部與其周界。
四年級
4-s-01 能運用「角」與「邊」等構成要素，辨認簡單平面圖形。
4-s-02 能透過操作，認識基本三角形與四邊形的簡單性質。
4-s-06 能理解平面上直角、垂直與平行的意義。
4-s-07 能由直角、垂直與平行的概念，認識簡單平面圖形。
五年級
5-s-04 能認識線對稱，並理解簡單平面圖形的線對稱性質。
六年級

6-s-01 能利用幾何形體的性質解決簡單的幾何問題。
八年級
8-s-17 能理解四邊形的基本性質。
8-s-18 能理解特殊四邊形的定義。
8-s-19 能作出正方形及平行四邊形的圖形。
8-s-23 能理解平行四邊形的意義與性質。
8-s-24 能理解平行四邊形的判別性質。
8-s-25 能理解平行四邊形的面積公式。
8-s-26 能理解梯形的意義與性質（包含梯形中線性質）。
九年級
9-s-02 能對簡單的相似多邊形指出對應邊成比例、對應角相等性質。

數學學習領域綱要中，將幾何課程概分成四個階段，階段一為一到三年級，強調幾何形體的認識、探索與操作，認為學生能指認幾何形體中的幾何要素，但尚不清楚其結構意義。階段二為四到五年級，此階段由於數與量的發展成熟，開始要學生結合數與形兩大主題，學習運用幾何形體的構成要素，如角、邊、面，以及數量性質，如角度、邊長、面積。

階段三為六到七年級，透過形體的分割、切補、截補、變形、變換等的操作，來了解形體的性質、幾何量的計算與非形式化推理。階段四為八到九年級，由具體操作情境進入推理幾何情境，最終目標為學會推理幾何證明。

分年細目表遵循數學學習領域綱要對於幾何課程的階段概分，所以一到三年級關於特殊四邊形的學習，大致與層次 0 的視覺期符合，只要學生能夠認出生活中的這些特殊四邊形，看的出來水平與

鉛直這些現象，知道圖形有內部與外部。

到了四到五年級，便進入到層次 1 的分析期，著重於圖形的構成要素，學生要關注到特殊四邊形的邊、角，以及延伸的簡單性質，對於平行、垂直、直角，也不再只限於辨識現象，提升到明白意義。

六到七年級這個階段，很自然的初步邁入層次 2 的非形式演繹期，開始要學生能夠使用幾何性質來解決問題，但在第三階段分年細目中，值得注意的是，七年級的部分完全沒有安排幾何的內容。

八到九年級這個階段，規劃的教學題材主要設定為層次 2 的非形式演繹期和層次 3 的形式演繹期，與四邊形相關的部份集中在八年級，以定義的方式介紹特殊四邊形，讓學生瞭解正方形、長方形、菱形、平行四邊形與梯形彼此之間的包含關係，並深入探討平行四邊形的基本性質與判別性質，九年級會進入層次 3 的形式演繹期，但主要內容是利用三角形，與四邊形有關的部份，僅有相似多邊形。

實務上的課本內容又是如何編寫的呢？國內小學數學課本，由康軒文教事業、南一書局以及翰林出版事業，囊括了絕大部分的市場，所以本節將依據康軒、南一、翰林三個版本，在第一冊到第十二冊的國民小學課本，和備課用書的教學指導與指引，來探討特殊四邊形圖形辨識的相關題材，與這些內容在小學數學課程，所佔據的教材地位。

在康軒版第一、二冊備課用書中的教學研究指引，簡略介紹了 van Hiele 的幾何思考層次，同時也認為，國小低年級的學生，大都在層次 0 的視覺期，對於幾何圖形的瞭解，需藉由無數次的具體實物操作、觀察、描述與比較，才能達到下一層次，所以課程內容

在第一冊為實際觸摸、滾動、堆疊紙盒、空灌、空瓶和積木，由立體實物抽離出平面圖形，並不要求對於平面圖形進行屬性分析。

又提到，每個層次的學生各自擁有獨立的語言符號，以及聯絡這些符號的關係系統，因此在這一層次為正確的關係，到了下一個層次可能不正確，例如長方形和正方形的關係，在層次 0 和層次 1 的學生有不同的涵義。

所以到了第二冊的課程內容，描述二維基本形體時，無論在課文內容中，或者單元練習題裡，都沒有介紹正方形是長方形的一種，課本的內容中，容易讓學生認為，此時的長方形，指得是長與寬不可以相等的長方形，正方形也不屬於長方形，如圖 2-1。

這個現象同樣發生於南一版，在介紹四種基本圖形時，把正方形與長方形分成兩類，如圖 2-2，與翰林版小學課本，介紹長方形時，長與寬都沒有等長的例子，如圖 2-3。



圖 2-1 康軒小學課本介紹長方形與正方形

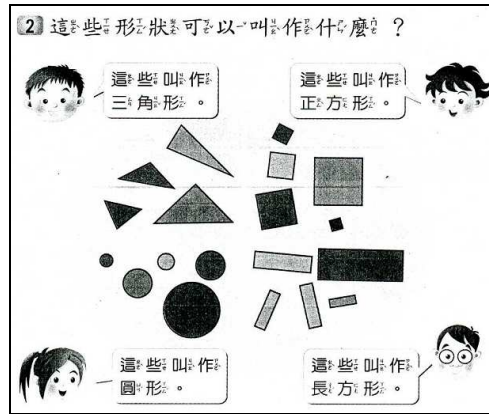


圖 2-2 南一小學課本分類四種圖形



圖 2-3 翰林小學課本介紹長方形

康軒版在小學四年級的第七冊，教學研究指引中提出，學生開始要進入層次 1 的分析期，課本以利用可活動的塑膠棒，圍出四邊形的教學活動引入，然後明確定義了四邊形「像這樣，有四個頂點、四條邊和四個角的圖形，都叫作四邊形」，見圖 2-4，此單元也同時定義了圓形、正三角形、等腰三角形、多邊形和正多邊形，南一版與翰林版亦於四年級的課程中，以圖形構成元素的觀點，介紹了四邊形有四個頂點、四條邊和四個角。

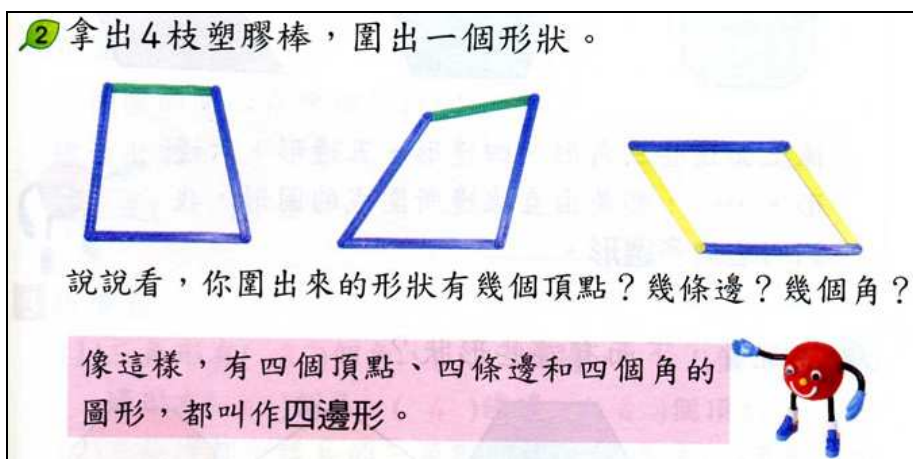


圖 2-4 康軒課本介紹四邊形定義的教學活動

到了小學五年級時，康軒版的第十冊，就明確定義了對邊、鄰邊、正方形、長方形、菱形、平行四邊形與梯形，見圖 2-5 到圖 2-10，南一版與翰林版的課本，亦於五年級時，定義了正方形、長方形、菱形、平行四邊形與梯形，三個版本的定義，都依照數學學習領域綱要中的標準名詞解釋，在語句上做些微修改，解釋的內容可見於表 2-2。



圖 2-5 康軒課本對邊與鄰邊的定義

正方形的4個角都是直角，4條邊都一樣長，而且兩雙對邊都分別互相平行。

圖 2-6 康軒課本正方形的定義

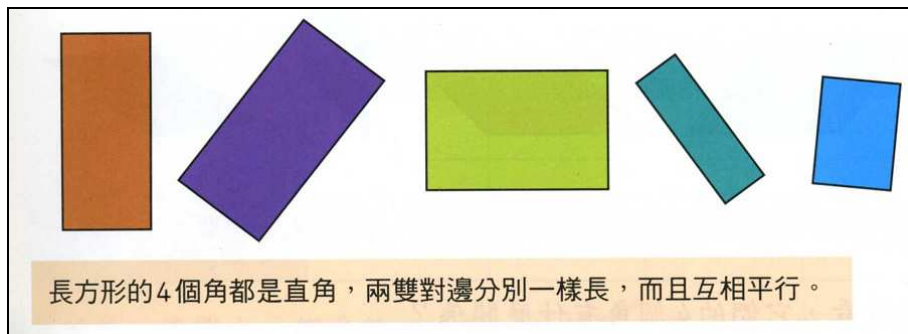


圖 2-7 康軒課本長方形的定義

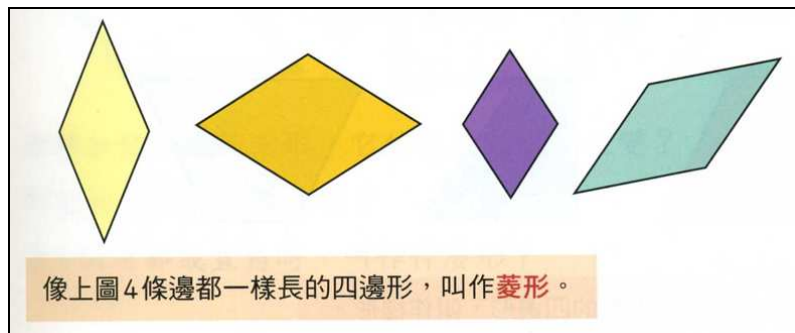


圖 2-8 康軒課本菱形的定義

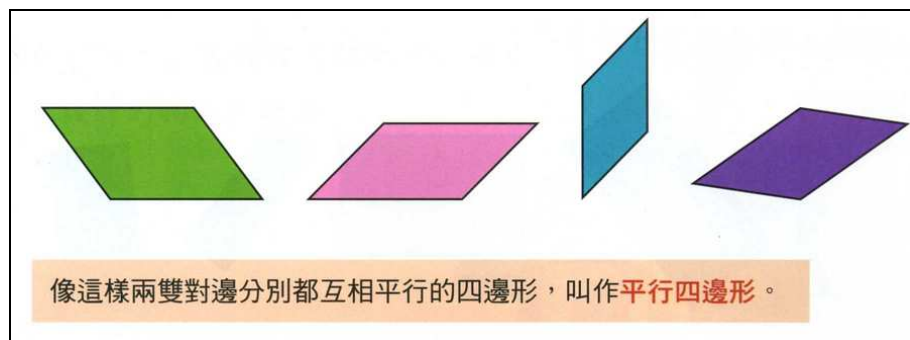


圖 2-9 康軒課本平行四邊形的定義

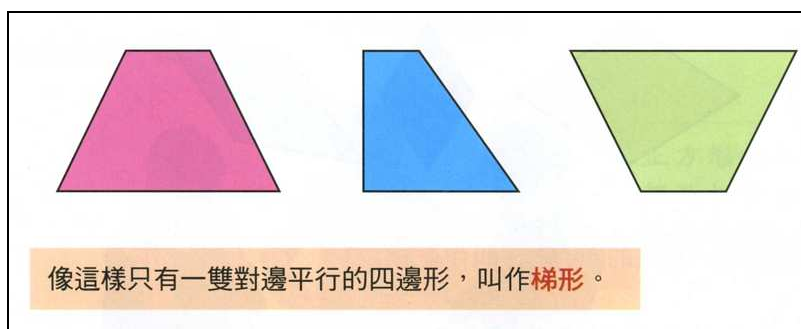


圖 2-10 康軒課本梯形的定義

表 2-2 特殊四邊形標準名詞解釋

長方形：四個角均為直角的四邊形，又稱矩形。
正方形：四個角均為直角且四邊等長的四邊形。
菱形：四邊等長的四邊形。
梯形：一組對邊（稱為上底和下底）平行的四邊形， 非上底與下底的兩邊，稱為梯形的腰。
平行四邊形：兩雙對邊平行的四邊形。

而正方形、長方形、菱形、平行四邊形，彼此之間包含關係的數學內容，康軒版第十冊的課本，利用觀察塑膠扣條所圍成的四邊形，在移動時會出現特例的方式，來探討彼此間的包含隸屬關係。

為了與學生的生活經驗貼近，在小學低年級的數學課程內容，大量從生活中，汲取各種學生實際接觸的事物，來介紹平面圖形，此刻特殊四邊形，僅介紹長方形與正方形，由於日常生活經驗裡，長方形跟正方形是沒有包含關係的，當然，這個時候的課本內容，也不會去碰觸正方形是長方形一種特例的議題。

如果學生在往後的學習歷程中，並沒有如預期般，從層次 0 的視覺期，進入層次 1 的分析期，會出現諸如長方形必須要長、寬不

等這樣的概念，以及無法接受或推論正方形是長方形的一種，是一點也不奇怪的，因為在日常生活經驗，與最初的學習數學記憶，都沒有正方形是長方形的概念。

研究者認為，在小學低年級時，大量使用實際物體，來介紹平面圖形有關，是造成圖形辨識迷思中，空間視覺類型的可能原因，日常生活中接觸到的實際物體，多半為立體圖形，就算是平面圖形，也是存在於三維空間中的平面圖形。

大量操弄的方式，固然可以幫助學生萃取出平面圖形的概念，若是引導過度的學習歷程不順利，學生還停留在上個階段，很容易誤解何謂平面圖形，造成空間視覺的辨識迷思類型，往後中高年級的課程，就直接談圖形的組成元素、定義與性質應用了，並沒有再一次的告知學生，何謂平面圖形。

在康軒版的國中數學課本中，一直到了八年級下學期的第四章第二小節，才再次出現四邊形的內容，接續在「平行」這個單元之後，平行的單元談的是何謂平行線？以及截線通過兩平行線後，會具有的三個截角性質，分別是同位角相等、內錯角相等與同側內角互補。

課程內容比起辨識特殊四邊形，難度高了很多，探討平行四邊形、長方形、菱形與正方形性質中邊的關係、角的關係與對角線的關係，見圖 2-11，以及平行四邊形的判別性質，分別是「若四邊形的兩雙對角分別相等，則此四邊形必為平行四邊形。」、「若四邊形的兩雙對邊分別相等，則此四邊形必為平行四邊形。」、「若四邊形的一組對邊平行且相等，則此四邊形必為平行四邊形。」、「若四邊形的兩對角線互相平分，則此四邊形必為平行四邊形。」，並給予嚴格的證明，見圖 2-12 與圖 2-13。

性質	圖形	平行四邊形	長方形	菱形	正方形
邊的關係	兩雙對邊互相平行	✓	✓	✓	✓
	兩雙對邊相等	✓	✓	✓	✓
	四邊相等			✓	✓
角的關係	兩雙對角相等	✓	✓	✓	✓
	四角相等		✓		✓
對角線的關係	對角線互相平分	✓	✓	✓	✓
	對角線相等		✓		✓
	對角線互相垂直			✓	✓

圖 2-11 康軒課本特殊四邊形的性質

在前面的主題中，我們知道「平行四邊形的兩雙對角相等」。反過來說，兩雙對角相等的四邊形是平行四邊形嗎？

右圖(四)，四邊形 $ABCD$ 中，若 $\angle A = \angle C$ 且 $\angle B = \angle D$ ，
 因為四邊形內角和 360° ，
 所以 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$ ，
 故 $2\angle A + 2\angle B = 360^\circ$ ，
 得 $\angle A + \angle B = 180^\circ$ ，因此 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (同側內角互補)。
 同理， $\angle A + \angle D = 180^\circ$ ，因此 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ (同側內角互補)。
 因為兩雙對邊互相平行，所以四邊形 $ABCD$ 是平行四邊形。

由上可知，**兩雙對角分別相等的四邊形是平行四邊形**。

圖(四)

圖 2-12 康軒課本平行四邊形判別性質證明一

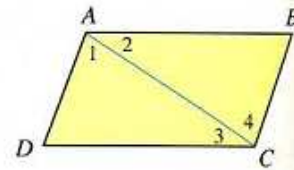
我們也知道「平行四邊形的兩雙對邊相等」。反過來說，兩雙對邊相等的四邊形是平行四邊形嗎？

右圖(五)，四邊形 $ABCD$ 中，若 $\overline{AB} = \overline{DC}$ 且 $\overline{AD} = \overline{BC}$ ，我們先連接 \overline{AC} ，在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle CDA$ 中，因為 $\overline{AB} = \overline{CD}$ ， $\overline{AD} = \overline{BC}$ ， $\overline{AC} = \overline{AC}$ ，由 SSS 全等性質可知 $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ ，因此 $\angle 1 = \angle 4$ ， $\angle 2 = \angle 3$ 。

因為截出來的內錯角相等，所以 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 。

因為兩雙對邊互相平行，所以四邊形 $ABCD$ 是平行四邊形。

由上可知，兩雙對邊分別相等的四邊形是平行四邊形。



圖(五)

圖 2-13 康軒課本平行四邊形判別性質證明二

第三節 幾何圖形的認知模式

一、Vinner 的概念心像與概念定義

在張春興（2006）所編寫的張氏心理學辭典中，概念（concept），是指對具有相關共同屬性一類事務，獲得的概括性的認識，狹義一點講，以單一概括性的名稱或符號，代表具有共同屬性的一類事物的全體時，此名稱或符號所代表者即為概念，概念的形成是學習的，簡單概念的學習過程，主要經由類化與辨別의 交互作用，把對具體事物的經驗，經抽象化而形成超越具體對象的認識，複雜概念的學習，則需經由理解或假設驗證的思考歷程。

又提及定義性概念（defined concept），指不能直接觀察事物特徵，而須經定義陳述所學到的概念，如幾何學中的直角一概念，是靠兩直線交叉構成 90° 角謂之直角的定義學到的。心象（mental image），指得是意識中形成的一個圖像，該圖像可以代表某個人，也可代表某種事物。

概念、概念性定義、心象，是屬於心理學的元素，也可以借用過來，談數學教育裡的一些學習現象，學生學了某些數學概念之後，腦海裡面所存在的心象，與文字敘述的定義性概念，之間一定有落差，該如何以心理學的觀點解釋數學中概念學習的諸多現象？

在這方面，David Tall 和 Shlomo Vinner，做了很好的詮釋，Tall & Vinner（1983）提出了概念心象（concept images）與概念定義（concept definition），來分析學生的抽象概念運作，概念心象指得是學生對於一個概念，於腦海中的所有心智圖象，包含對於心智圖象相關的性質理解與操作過程，概念定義指得是用文字語言，來具體說明概念，每一個學生概念定義的形成，來自於自己對

於概念的解釋，也可能是對於文字定義的再建構，成為個人的概念定義。

對於學生來說，每個概念的認知結構中，存在這兩種不同的組成元素，概念心象與概念定義，但不一定會兩個都有，有可能一個組成元素是空的，也就是這個概念背後只有概念心象，或者只有概念定義。當然，不會兩個都是空的，若兩個都是空的，表示學生對此概念一無所知，完全陌生。概念心像跟概念定義大部分是獨立形成的，但是兩者之間也可能會互相影響。學生對於同一個概念的概念心像跟概念定義，實際上可能是互相矛盾的，但他們沒察覺到就可以同時並存。

國中學生在辨識特殊四邊形時，背後的依據是他們對於這些特殊四邊形的概念心象或者概念定義，由陳創義（2003）在我國青少年幾何學習概念研究計劃中的全國抽測結果，可以發現，學生對於正方形、長方形、菱形、平行四邊形、梯形這些圖形的概念並不陌生，放棄作答的比例很低，這表示了，對於大多數的國中學生，特殊四邊形的概念，都不是空的。

至於作答判斷時，主要依賴的是概念心象還是概念定義？研究者認為，熟悉且常見於日常生活的基本圖形，學生的回答是根據概念心象。

關於概念心象與概念定義，還有許多更細部的現象可以探討，例如，有沒有可能判斷正方形時用概念定義，判斷梯形時改用概念定義？這些不容易從選擇、配合題得知，需要較為開放性的問答題，或者跨大題的比較，甚至需要進一步的訪談資料來確認。

二、Duval 的幾何圖形瞭解

Vinner (1983) 所提出的概念心象與概念定義，非專指幾何圖形，許多的數學概念，例如函數、等差數列、全等三角形、…等，皆可適用。

關於幾何圖形的部份，Duval (1995) 從如何去理解幾何圖形著手，將學生認知理解幾何圖形的方式，分為知覺性理解、序列性理解、論述性理解、操作性理解四種方式，分別敘述如下。

知覺性理解 (perceptual apprehension)

知覺性理解，指的是在理解幾何圖形時，將其對於圖形的組織法則，以及繪圖線索，組織整合成一個整體性的辨識準則，所產生的心像與視覺圖形並不相同，即使視覺圖形產生旋轉、翻轉等的改變，只要不違反整合後的辨識準則，並不影響其對於圖形的理解。

知覺性理解保留了被整合過的法則與線索，同時也可能伴隨著某些錯誤，在辨識一個複合的幾何圖形時，知覺性理解可以區分和辨識出複合圖形中的子圖形或者單位圖形，這些子圖形也可能是不需要依靠圖形所建構的成分，例如兩個為外切關係的圓，外切的關係就是一種不需要依靠圖形所建構的成分。

序列性理解 (sequential apprehension)

序列性理解，指的是在理解幾何圖形時，不依賴視覺上的法則與線索，而是根據構圖工具的限制，與數學的性質，例如對於圓形的理解，可能來自於圓規，直尺、圓規、幾何繪圖軟體中的各種設定，都是構圖工具，也可以將序列性理解稱為構圖性理解。

不難發現，序列性理解的關鍵在於數學經驗與知識，幾何圖像是一個數學表徵物操作相關的結果，由於構圖工具都有其限制，限制可以產生回饋，但如果沒有顧及到工具限制，與圖形性質之間的關係，那麼幾何圖形就無法被瞭解。

論述性理解 (discursive apprehension)

論述性理解，指的是在理解幾何圖形時，透過語言或文字，來描述一個圖形所具有的性質，或者利用語言文字的陳述，進行圖形推理的認知歷程，論述性理解對於圖形的辨識，是建立在敘述上。

對同一個圖形，每個人所見的脈絡與性質，可能不盡相同，對於圖形的說明程度，顯現了對此圖形的理解程度，某些在繪圖中呈現的數學性質，無法透過知覺性的瞭解來理解，必須建立在演繹之上，依靠論述性理解，而論述性理解可以在知覺性的瞭解不變的情況下改變。

操作性理解 (operative apprehension)

操作性理解，指的是在理解幾何圖形時，轉換心像或實體圖形的一種認知歷程，將圖形轉換後，知覺的辨識與完形不同，在觀察圖形時，可以透過操弄圖形，獲得解題的靈感，這也是一種對問題的洞察方式。

大致有三種對於給定圖形的操弄修改方式，第一個是光學方式，就是將圖形放大、縮小、鏡射與傾斜（改變投影點），第二個是位移方式，就是改變圖形的方向以及位置，第三個是割補方式，以圖形分割及圖形拼補，來改變給定的圖形。

Duval (1998) 認為，大量的、適當的讓學生操弄幾何圖形，對於學習幾何很有幫助，圖 2-14 為探討著色部分面積相等的問題，藉由圖形中適當的操弄方法，就讓這三個問題變得容易許多，是一個以良好的操弄修改方式，學習幾何的例子。

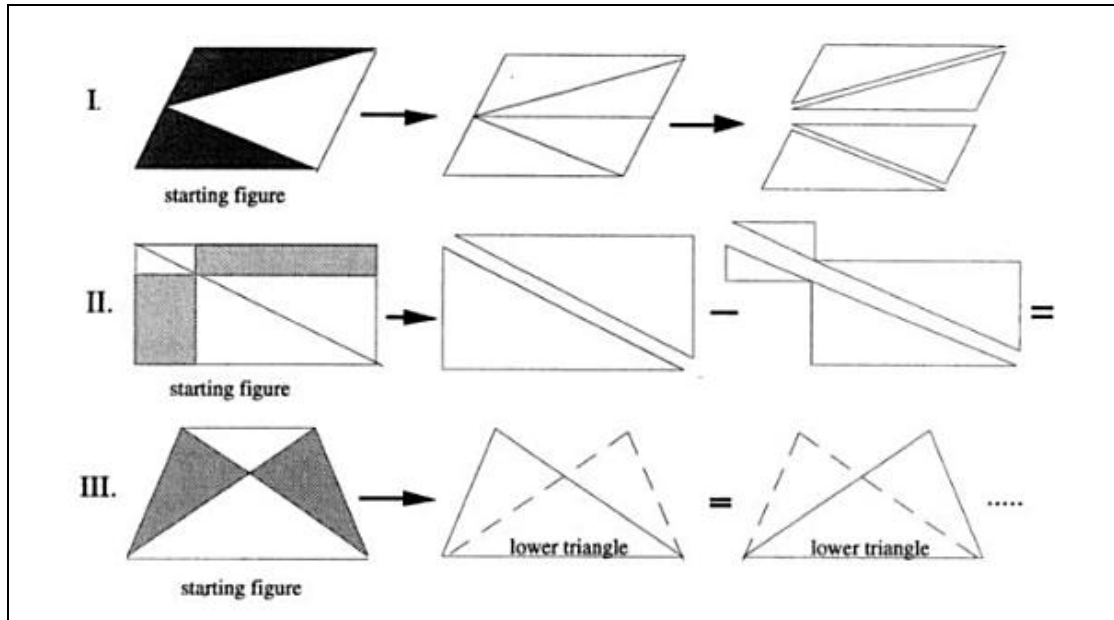


圖 2-14 透過操作圖形探索面積相等

要注意的是，這四個認知理解方式，並沒有優劣之分，都能提供學習者對於圖形的思考方式，因此本研究所要設計的教學活動，將盡可能考慮到四個認知理解方式，希望學生接觸多樣化的理解方式，從不同的觀點去學習四邊形辨識。

第四節 幾何教學的相關文獻

一、Van Hiele 的幾何思考學習階段

為了促使學生從一個思考層次，提昇到另一個較高思考層次，van Hiele (1986) 提出「五階段學習模式」，分別為：諮詢、引導方向、解說、自由方向、統整，分別敘述如下。

第一階段：學前諮詢 (information)

教師在教學之前，要先與學生作雙向溝通，並經由觀察與發問，來了解學生已具備那些知識，藉以作為教學準備之參考。老師和學生進行對話，以了解題目與目標，在這個階段，使用的字彙與用辭是相當重要的。學生在該幾何思考層次中，獨特的字彙、用語和題目的標題，透過對話而被引入，且作了觀察，提出了問題。

第二階段：引導學習方向 (guided orientation)

教師引導學生探索、操作，例如，排列、組合、積木、摺紙等活動，在學生探索活動過程中，教師宜有計畫的依序引導學生，使其了解幾何的概念。

在第二個階段，就是要正確的指引方向，學生藉由資料來深入探究的領域，他已經知道那個方向是針對這個研究；當獨特的結構逐漸呈現在他面前，相關的資料就因此浮現出來。

老師透過資料和活動，仔細地連續講解，學生們也因此而探究出研究的要旨，就可對所包含的概念和結構更加熟悉。這個資料和活動，應該逐漸地呈現這層次中，獨特的結構給學生們。許多資料為了導致有特別的反應，而包含了經過設計的簡短課題。

第三階段：解說 (explicitation)

這個階段的學生，已逐漸了解幾何圖形的關係，教師引導討論學習的主要內容，使其幾何概念提升到理解的層次。

在第三個階段的過程中，經驗的獲得取決於正確的語言符號，和學生們在課堂上學習透過討論，去表達他們所觀察到的結構之意見，老師只需注意這些討論所使用的習慣措詞，關連系統在這第三階段就有一部份形成了。

來自老師的少許幫助，學生們就能建立他們的經驗，且精練他們的詞彙，因此他們可以表達、交換、和討論結構的相關性。老師的角色是幫助學生有正確和合適的字彙和語言。

第四階段：自由探索 (free orientation)

進入這個階段的學生，教師可以選擇適當的教材與幾何問題，來鼓勵學生思考與解答這些幾何問題。

第四階段是自由探索，調查的範圍是大多數學生知道的，但學生仍需迅速地找到他的方向。他又認為，藉著分派任務以不同的方式來完成，所有路標的種類就在調查的領域中，這些路標秀出了符號的路徑。

學生們在不同的方式上，遭遇更多複雜且有許多步驟的課題，當他們靠自己解決這個課題時，他們便獲得了經驗。

學生們在概念的主題被研究中，作出了許多明確的關連性，對於他們來說，藉由調查的方法，研究主題間的許多關連性就變得明確了。

第五階段：統整 (integration)

最後的階段是整合，學生雖然已經糾正他自己，但是他仍然必須獲得他所使用的方法的概念。因此他試著去濃縮他所探索過全部範圍的思考。在這一點上，老師能藉著供給「整體的概念」來幫助學生。重點是這概括並不能呈現任何新的事物給學生，他們只是摘要地擷取一些學生已經知道的東西。

研究者將思考如何把諮詢、引導方向、解說、自由方向、統整，五階段學習模式，應用在設計非分類教學活動，與典型例性質察覺教學活動。

二、分類教學概念

陳創義（2006）認為，在數學中的分類過程中，所需要注意的是分類的範圍，以及明確的分類準則。對分類而言，簡單的分類是屬於或不屬於，尤其是在具有某種概念或性質的屬性，它對概念的釐清有幫助。因為從分類的觀點來看，就是分成兩類，兩類究竟有什麼東西？相當於是考慮概念的正例與非例。

陳創義（2006）提出強理路的分類教學，所謂強理路的分類教學，也就是對於分類的對象之形成，與界定以及分類準則的功能意義，做適當的描述及進行，讓學生可以瞭解其理路，以及對各類別，作適當的命名或表徵活動。

舉例來說，在作三角形的分類，由於平面三角形的三內角和180度，因此至少有兩個是銳角，而剩下的那一個就可能是銳角、

直角或鈍角，這是分類的脈絡，同時依兩銳角之外的第三個角，來給予三角形命名。

準則的設計，要考慮分類的要求，要求每個區塊彼此之間互斥，也就是交集為空集合，這是達成好的分類的要求之一，尤其在數學上分類的要求。

因此，分類的範圍的界定及其理路的釐清，對分類準則的屬性及其性質的強調，可以增進概念瞭解，進一步可以提供往後窮舉法的數學證明做墊步。

好的分類教學，應該可以解決學生對圖形辨識上，所出現的大部分問題，例如，語意的問題，在於生活語言中的意義，混淆在數學語言中，沒有釐清，因此透過分類時的命名，區隔生活語言的含意，及數學名詞之間的異同；典型例問題，所需的是經驗非典型例，因此在分類的教學中，可以經驗許多的非典型例；透過分類範圍的界定，以及分類準則中強調的圖形中，所具有元素分析屬性，可以來解決互斥思維及空間視覺問題。

陳創義（2006）由分類教學的教學實驗有三個發現，第一、強化管理路的數學分類概念教學，有助於概念的學習。第二、在國中實施強化管理路的數學分類概念教學是可行的。第三、強化管理路的數學分類概念在數學的後續發展是很重要的。

三、三角形分類教學套件的應用

陳創義（2003）在民國九十二年，台灣的全國中學七到九年級幾何概念調查中，從調查結果整理，提出關於影響學生圖形識別的幾個重要因素，分別是語意理解、典型例現象、互斥思維與和三維

空間投影思維。

如何針對這些影響學生形狀識別的重要因素，對症下藥，改善辨識困難？陳創義（2006）提出分類教學的概念，以此概念設計了三角形分類教學套件，讓學生在進行準則判斷的過程中，釐清三角形辨識上的問題，進而清楚的瞭解三角形性質。

所使用的套件工具，為二十張三角形圖卡，與兩種顏色的繩子，首先教導學生遮住任意三角形都必定具有的兩個銳角後，觀察剩下的那個角是銳角、鈍角或直角，以此來分辨三角形是銳角、鈍角或直角三角形。

之後再讓學生進行正三角形、非正三角形，銳角、鈍角、直角三角形，雙準則的分類，形成分類圖形，如圖 2-15，進而瞭解到，正三角形也是銳角三角形的一種。

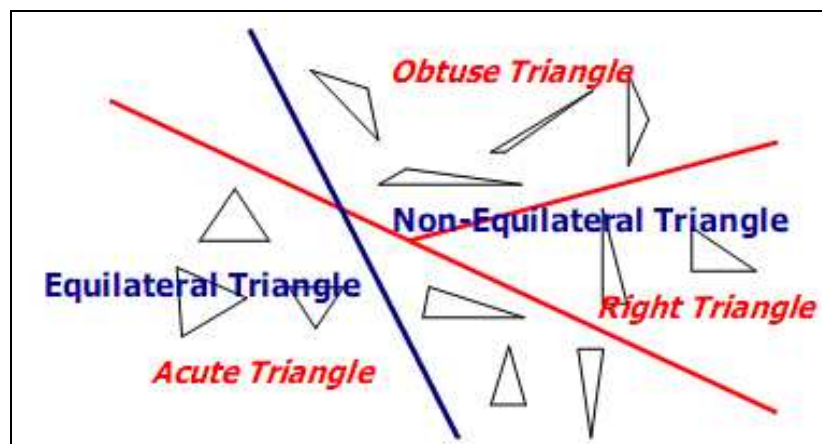


圖 2-15 雙準則三角形分類圖

此三角形分類教學套件的應用，在教學實驗中，讓學生對銳角、鈍角、直角三角形的辨識正確率，分別從前測的 24.4%、30.3%、51.5%，提升到後測的 81.8%、84.8%、90.9%。

第五節 四邊形辨識與包含關係的相關研究

一、四邊形辨識的相關研究

首先探討近年國內對於碩、博士論文以特殊四邊形為研究題材的各種研究心得與成果，來自國內本土性，關於特殊四邊形這個教學題材，經過研究而獲得的經驗性資料，對於研究者在編寫教學活動時，可以提供有幫助的資訊。

游世斌（2007）研究過國小五年級學童的平行四邊形概念結構，結果顯示，小學五年級的學生，在角的概念方面，先發展出平行四邊形外角和與內角和均為 360° 的概念，才會發展出對角相等，以及鄰角互補的概念，在邊長概念方面，先發展出對邊互相等長，才會發展出對邊互相平行，整體而言，學生容易混淆平行四邊形的周長以及面積公式。

張炳煌（2003）研究過國小四年級學童的四邊形概念，結果顯示，在研究探測完實驗學生的四邊形迷思概念後，以認知衝突的方式為主要教學策略，內容主要為利用類比教學法、蘇格拉底對話法與異例法來製造認知衝突，根據其後測與延後測的 t 考驗及雙變數，發現認知衝突策略，能夠有效的改善辨識迷思，而後測的表現顯示，與性別沒有明顯的關係。

石宛臻（2004）研究過反例對國小五年級學童四邊形幾何概念調整的影響，研究結果指出，學童的幾何圖形辨識作業上，常有兩類的缺陷，一方面是把部份非例納入概念中，例如把斜長的平行四邊形歸類為長方形，另一方面是排除了部份的正例，例如把長方形排除在平行四邊形的概念範疇之外。在提供適當反例的情況下，能夠改善排除了部份的正例的現象。

黃志祥（2003）的研究，則從概念心像與概念定義的觀點，來探討國小六年級學童，四邊形幾何概念的包含關係，其研究結果顯示，學生在四邊形幾何圖形的概念心像上，普遍有包含性不足的情況，也就是有些圖例被錯誤地排除，例如以為斜擺的正方形是菱形，但不是正方形，原因應為學生接觸的特殊四邊形圖形，通常是典型圖例。

而增加非典型例、特例，或宣告反例的方式，不只可以修正概念心像，也可以進一步改變概念定義。學生對於四邊形幾何圖形概念定義的建立和修正，是藉由概念心像來進行，不過概念心像的調整，又常常必須藉由概念定義的幫助，但學生對概念心像和概念定義間，可能存在著不一致現象，且不一定會覺察，如果被指出不一致時，學生對於概念的詮釋，會比較依賴概念心像。

謝貞秀（2002）在其研究國小中年級學童平面幾何圖形概念之探究中，以個別晤談的研究方法。發現，在描述圖形方面，國小中年級學生大都是用「形容詞」來描述圓形，用「邊的性質」描述正方形、長方形、菱形、正三角形、等腰三角形，而描述平行四邊形、梯形、箏形對學生來說是較困難，常用日常生活實例來描述。

辨識圖形時，可能受圖形的大小、方位、邊數角數、邊的曲直、邊的長短、邊角的性質、封閉性等影響，而產生一些迷思概念，有些學生不認為「邊長比例相差較大」是三角形；受方位影響，認為正方形一定是正正的，菱形一定是斜斜的；認為長方形是「長長的」形狀，而忽略直角的性質。

對於圖形「邊」的性質之了解多於「角」的性質。有些學生不認為菱形、梯形、箏形是四邊形；認為「尖尖的角」或「直角」才是角，平角不是角。若要求學生以徒手畫出平行四邊形、菱形、箏

形，會有困難，畫得不很精準，大部分有一邊是水平或垂直的圖形，在方位上較少變化。

高耀琮（2002）曾研究兒童平面幾何圖形概念，以幼稚園以及國小一、二年級的學生為研究對象，探討他們辨認幾何形體所使用的策略，以及描述圖形時所使用的語詞，結果發現，辨認幾何圖形的迷思概念，主要受圖形的封閉性、方位及其大小等影響。

幼稚園的兒童容易認為正方形擺成底不是水平方位就不是正方形；一年級的兒童有比較強烈「長長的」長方形原型，容易忽略了「直角」的性質，有兒童可以畫出底不是水平方位的正方形、長方形，不同性別的兒童，對於幾何圖形整體上的辨認，以及對於各個圖形的辨認都未達顯著差異。

王文正（2004）以模糊理論與試題反應理論，探討國小四五年級學童四邊形概念，發現學生在四邊形所犯的迷思概念彙整後有以下幾種，凹四邊形不認為是四邊形的一種，有特定名稱（長方形、正方形、菱形）的四邊形不是平行四邊形的一種，正方形不是長方形，當正方形擺放成菱形的標準式後，學童就認為是菱形而非正方形，非菱形典型圖形不是菱形，非梯形典型圖形不是梯形，虛線所構成的圖形是四邊形，沒有封閉的概念。

從近年我國數學教育類的碩博士論文中，可以發現，國內對於特殊四邊形題材的研究，多數集中在小學四到六年級，在這些研究結果，所顯現的此階段學生，對於四邊形的辨識迷思，都能夠用語意、典型例、互斥思維、空間視覺來加以歸類解釋。

而所提供建議的解決辨識迷思方法，研究者認為，主旨都圍繞在破除典型例，以著破除各個種類的圖形，在學生腦海中的典型例心像為方針，搭配各式教學方法來進行設計。

至於國中階段的研究，僅有林玲誼（2007）曾研究以概念圖合作學習的方式，應用於國中「四邊形」單元，其核心設計理念，為余民寧（1997）所提出的概念構圖，用合作學習的方式教學，採用準實驗研究法，以九年級學生為對象，進行教學實驗。

其研究結果顯示，接受概念圖合作學習教學的實驗組全體學生，與中、低分群學生，在「概念建構」、「運算能力」、「理解能力」、「推理能力」的答對百分比率皆高於接受一般傳統教學的對照組學生。

依據研究者的教學經驗，在國中數學的課程範圍，對於一個完整的章節，以概念圖合作學習的方式，的確能夠幫助學生組織統整此章節的內容架構，但在四邊形辨識迷思的改善上，並非林玲誼（2007）的概念圖研究中所在意的。

綜觀近年國內碩、博士論文，關於學習特殊四邊形的各式研究，可以發現在小學數學教育的研究範疇，特殊四邊形是個很熱門的議題，其針對迷思概念的部份，讓研究者得到了豐富的經驗性資料，也為語意、典型例、互斥思維、空間視覺四種辨識迷思類型，提供佐證。

然而這個議題在國中數學教育的研究範疇，相關的探討並不多，國中七年級的數學課程，完全沒有幾何的內容，幾何部分八年級要到上學期的尾聲，才會進入畢氏定理的章節。

倘若學生在小學五六年級的時候，學習的歷程並不順利，存在有四邊形圖形辨識的迷思，其後有接近兩年的時間，數學都在學代數沒接觸幾何，到了八年級下學期，開始學習平行垂直、多邊形的內外角、平行四邊形的等價定義時，其實有很多學生的程度，仍然跟小學高年級的時候一樣，對於特殊四邊形的辨識，還停留在層次

0 的視覺期。

而此刻學校的數學課程與教學，卻是以層次 2 的非形式演繹期的來規劃與進行，部分的內容甚至遵循層次 3 形式演繹期的理念來設計，學生程度與教材難度間落差很大，以至於這些學生內心出現「幾何好難」的聲音，就一點也不奇怪了。

二、日本與蘇格蘭兩地的包含關係比較研究

日本的 Masakazu Okazaki (2006) 英國蘇格蘭地區的 Taro Fujita (2006)，曾合作進行國際比較研究，探查日本與蘇格蘭兩地學生，關於特殊四邊形的一些典型例現象，以及包含關係的瞭解與認知途徑。

其研究成果，發表於 2007 年的第三十一屆國際數學教育心理學年會 (The 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME 31)。

Okazaki 和 Fujita 的研究範疇，符合研究者歸納四邊形辨識迷思中，互斥思維類型與典型例類型，Okazaki 和 Fujita 的研究重心主要在互斥思維，探討兩地學生對於特殊四邊形，彼此包含關係的理解與認知形成方式。

在日本與蘇格蘭，四邊形的包含關係同樣是數學學習上的熱門題材，Okazaki 和 Fujita 認為，學生要能夠理解長方形也是平行四邊形的一種，根植於明白各種特殊四邊形的定義與性質，而且能夠利用這些定義與性質，作包含關係上的推演，達到這個程度的學生，其幾何認知層次，處於層次 2 的非形式演繹期。

然而，兩地的研究結果都顯示，從層次 1 的分析期進展到層次

2 的非形式演繹期，是非常緩慢而困難的。

Okazaki 和 Fujita 採用問卷，調查 234 位日本中學九年級的學生，以及介於十五歲到十八歲間，共 111 位的蘇格蘭小學師範生，來探測兩地學生，理解四邊形包含關係的程度，問卷有五個問題，第一題到第三題，要學生挑選平行四邊形、長方形、菱形，見圖 2-16 到圖 2-18。

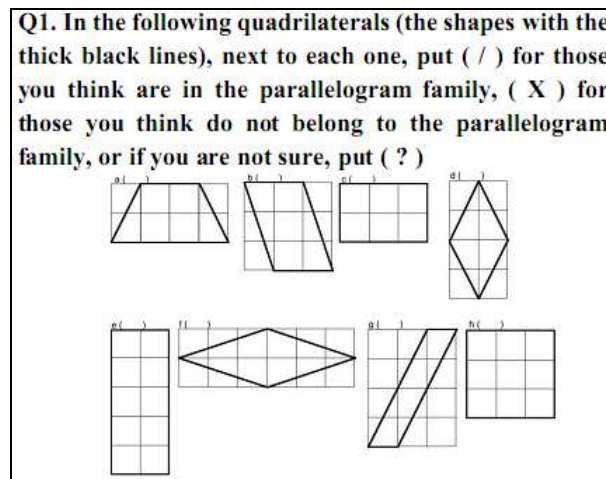


圖 2-16 選出平行四邊形

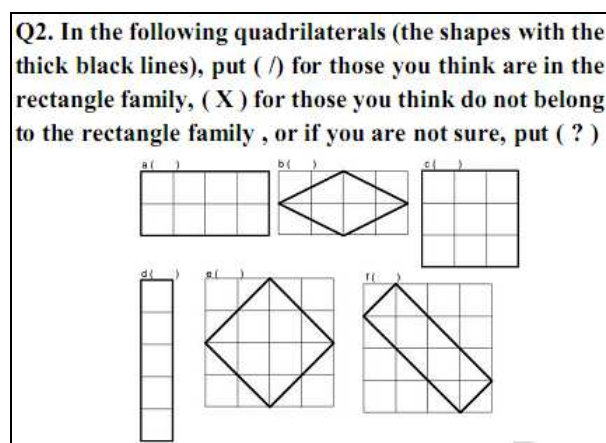


圖 2-17 選出長方形

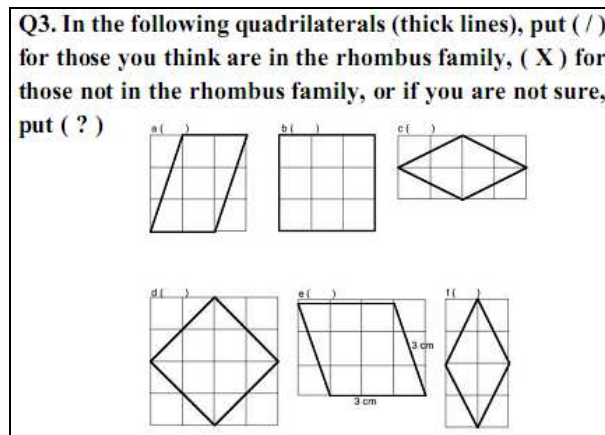


圖 2-18 選出菱形

第四題是平行四邊形、長方形、菱形三者性質的是非判斷，第五題是正方形、長方形、菱形、平行四邊形之間，兩兩圖形的包含關係比較，見圖 2-19、圖 2-20。

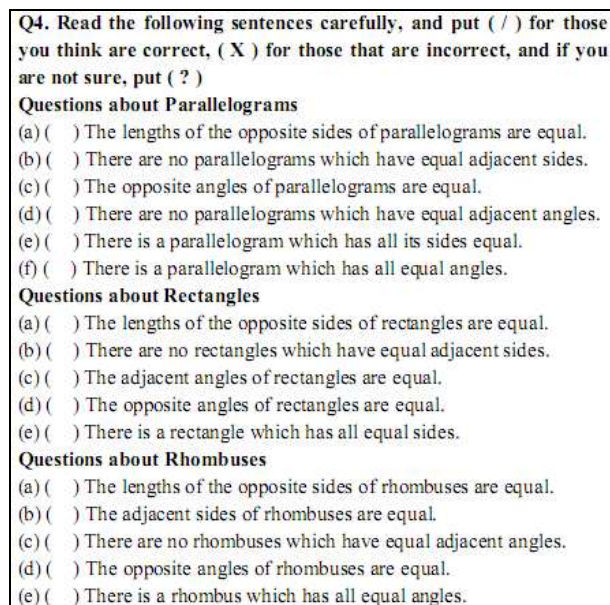


圖 2-19 平行四邊形、長方形、菱形性質判斷

Q5. Read the following sentences carefully, and put (/) for those you think are correct, (X) for those which are incorrect, or if you are not sure, put (?).	
1. About parallelograms and rhombuses	
(a) ()	It is possible to say that parallelograms are special types of rhombuses.
(b) ()	It is possible to say that rhombuses are special types of parallelograms.
2. About parallelograms and rectangles	
(a) ()	It is possible to say that parallelograms are special types of rectangles.
(b) ()	It is possible to say that rectangles are special types of parallelograms.
3. About squares and rhombuses	
(a) ()	It is possible to say that squares are special types of rhombuses.
(b) ()	It is possible to say that rhombuses are special types of squares.
4. About squares and rectangles	
(a) ()	It is possible to say that rectangles are special types of squares.
(b) ()	It is possible to say that squares are special types of rectangles.

圖 2-20 正方形、長方形、菱形、平行四邊形包含關係

藉由問卷作答的結果，Okazaki 和 Fujita 分析其對於包含關係的迷思現象，與兩地學生學習理解正方形、長方形、菱形、平行四邊形的認知途徑。

Okazaki 和 Fujita 的研究結果顯示，在四邊形的包含關係中，日本學生最不擅長的，是理解正方形也是長方形的一種，只有 19% 正確，蘇格蘭學生最不擅長的，是理解正方形也是菱形的一種，只有 17% 正確，詳細數據見表 2-3。

表 2-3 日蘇兩地學生認知包含關係比例

Rhom/Parall		Rect/Parall		Sq/Rect		Sq/Rhom	
J	S	J	S	J	S	J	S
62%	52%	35%	41%	19%	37%	44%	17%

Okazaki 認為，日本學生不認為正方形也是長方形的一種，因為在日本數學課程中，首次認識長方形，是在小學二年級，此刻的教材服膺生活經驗，告訴學生長方形專指長與寬不相等，蘇格蘭並沒有如此的生活經驗，所以也沒有這樣的課程設計。

Okazaki 和 Fujita 提出了兩地學生瞭解包含關係的認知途徑方

式，見圖 2-21，相同的是，兩地學生最先能夠接受的，是菱形為平行四邊形的一種，再以此為基礎，發展出長方形是平行四邊形的一種、正方形是平行四邊形的一種、正方形是長方形的一種。

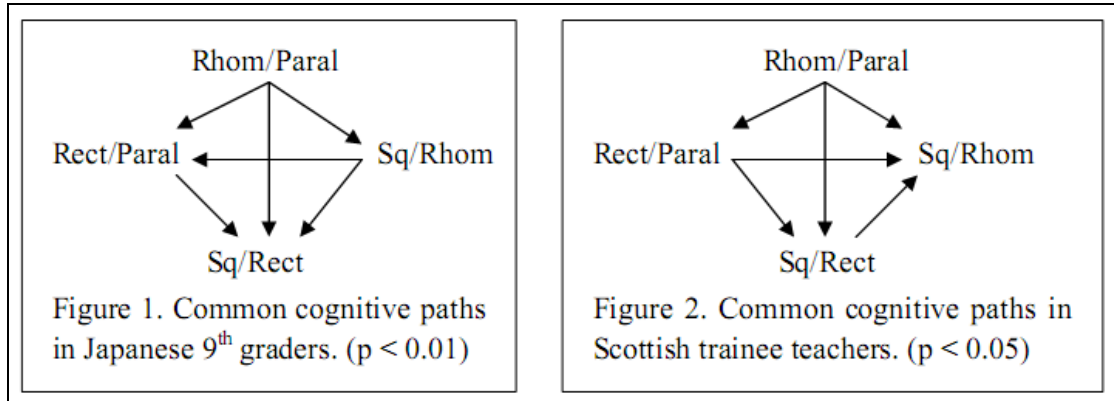


圖 2-21 日蘇兩地學生認知途徑

不同的是，日本學生傾向先接受正方形是菱形的一種，再以此發展長方形是平行四邊形的一種與正方形是長方形的一種，而蘇格蘭的學生則傾向，先接受方形是平行四邊形的一種與正方形是長方形的一種，最後再發展出正方形是菱形的一種。

第參章 研究方法

研究方法共有四個小節，第一小節，是研究架構，本研究定位為應用性研究，規劃以實驗研究法，來探討分類教學策略，以及非典型例性質察覺教學策略。實驗設計以單組前後測為架構，並利用延後測與對照組兩種方式，補足前實驗研究法的缺遺。

第二小節，是研究對象，共有五個七年級的班級，班級人數為 31 到 36 人不等，分為試驗組兩個班，實驗組兩個班，對照組一個班。

第三小節，是研究工具，四邊形辨識的實驗評量研究工具，有預試、前測、後測、延後測四份評量，教學活動研究工具，有非典型例性質察教學活動，與分類教學活動。

第四小節，是研究流程，以實驗流程表，說明實驗與評量流程，與實施的日期，以研究進度甘梯圖，說明本研究歷時一年三個月的研究進度。

第一節 研究架構

本研究的定位為應用性研究（applied research），應用性研究的目的，是尋求解決問題的辦法，汲取基礎性研究之發現、理解和解釋，並應用於現實的問題及經驗中。

在四邊形辨識迷思的問題上，研究者認為分類教學策略，以及非典型例性質察覺教學策略，所設計的兩種教學活動，在教學現場具有可行性，亦能夠幫助學生從層次 0 的視覺期，提升至層次 1 的分析期，並且在包含關係的部分，能夠擁有一些層次 2 非形式演繹期的經驗。

研究者將採用實驗研究法，進行教學實驗取得數據資料，並依據資料結果進行分析。以實驗研究法中，利用單組前後測方式的前實驗設計為主要架構，對於依據非分類教學策略，與典型例性質察覺教學策略，所設計的兩組教學活動，個別施以實驗，來檢視分類教學策略，與非典型例性質察覺教學策略的實際應用結果。

為了彌補前實驗設計法的不足，提升教學實驗的效度，研究者規劃了兩個方法，一個是時間三角測量，在兩個教學實驗，都施以延後測，用來確認後測的結果，另一個是類似準實驗設計法的控制組，在本校七年級中，隨機選擇一個班級，作為控制組，施以同一份延後測問卷，與兩個實驗組延後測結果對照比較。

研究者於第一章，提出了四個待答問題：

- 一、根據圖形定義辨識四邊形，比根據圖形名稱辨識四邊形正確率高的現象，是否存在於實驗的學生當中？若存在的話原因為何？如何縮減此差距？

- 二、分類教學策略，是否改善了四邊形圖形的辨識迷思？
- 三、非典型例性質察覺教學策略，是否改善了四邊形圖形的辨識迷思？
- 四、在四邊形圖形辨識上，如何讓學生從特殊化過度到一般化？也就是從依據輪廓判斷，存在各種迷思現象，到擁有圖形定義的概念，能夠理解在判斷圖形時，需要依據定義的內容，並且能瞭解正確的四邊形定義。

根據以上研究定位與研究方法的大略介紹，以及為了回答所提出的待答問題，研究者將研究規劃成五個階段。

第一個階段是前測，在確認實驗班級中，每位學生有哪些四邊形辨識上的迷思，研究者會針對語意、典型例、互斥思維、空間視覺四種易犯的四邊形辨識迷思，來設計前測問卷，並以非前實驗設計法研究對象的同年級任教班級 7A 班，進行前測問卷的預試。

利用預試的結果來修正前測問卷，然後進行三個班級 7B、7C、7D 的前測，除了蒐集每位學生的四邊形辨識迷思概念，也將在前測的過程中，觀察學生在辨識四邊形的時候，除了以視覺辨別，直尺測量外，是否有其他的方法，例如就地取材，使用各種隨手可得的工具來進行測量估計。

第二個階段是實驗，會根據上個階段的研究結果，以及研究者在參與設計三角形辨識分類教學套件時，所累積的實務經驗，來設計四邊形辨識的分類教學活動，與非典型例性質察覺教學活動。

為了提升教學活動在實際應用上的可行性，研究者會進行試教，在 7A、7B 兩個班級，分別進行分類教學活動，與非典型例性質

察覺教學活動，再由此實際講授教學活動的經驗，來為分類教學活動，與非典型例性質察覺教學活動的內容修改，以修改過後的版本，對 7C、7D 兩個班級進行教學實驗。

第三個階段是後測，在探查分類教學活動，與非典型例性質察覺教學活動，應用之後的改善效果，所以會在 7C、7D 兩個班級施以後測問卷。

後測問卷的編寫，以前測問卷的內容為基礎，不同的是，前測問卷屬於診斷性測驗，功能在於確定學習困難的原因，試題難度上是容易的，而後測問卷屬於總結性測驗，試題會有廣大的難度範圍，後測問卷的結果，用來提供資料，說明四邊形辨識的語意、典型例、互斥思維、空間視覺四個迷思類型的具體改善成果。

在第四個階段，是檢定與對照後測結果，會對 7C、7D、7E 三個班級施以延後測，延後測是後測的複本測驗，7C、7D 的延後測施測是為了針對後測的結果，給予時間上的三角檢定。

7E 是隨機挑選非研究者任教的班級，並沒有進行過兩種教學活動，施以同樣一份延後測問卷，所得到的結果，將為 7C、7D 兩個班級的測驗結果，提供類似準實驗設計法中控制組的對照功能。

到了最後的第五個階段，是回答問題與提出論點，研究者將針對分類教學策略，與非典型例性質察覺教學策略，如何幫助學生，從 Van Hiele 幾何認知層次中層次 0 的視覺期，提升至層次 1 的分析期，並且在包含關係的部分，能夠擁有一些層次 2 非形式演繹期的經驗的關鍵要素，進行回答。

至本階段時，關於四邊形圖形辨識的研究議題，已累積了大量的技術性與非技術性文件，研究者希望能夠在回答研究問題後，進一步的提出幫助學習幾何圖形辨識的論點。

依循 Campbell 和 Stanley (1963) 所提出的代表符號與傳統， X 表示實驗組接受實驗變項或措施，實驗效果必須受到測量， O 表示觀察或測量的過程，則單組前後測設計的圖示如圖 3-1。

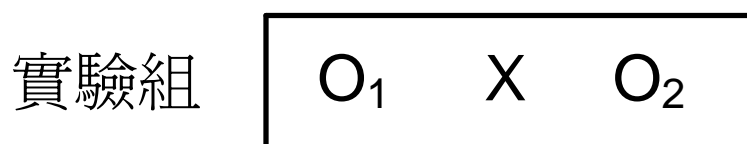


圖 3-1 單組前後測設計

在教育實驗中，通常 O_1 表示前測， X 表示教學實驗， O_2 表示後測， O_1 與 O_2 之間的差異，來自於操弄 X 的結果，但由於教育實驗很難控制所有外在的影響，這些外在的影響，也會造成 O_1 與 O_2 之間的差異。

研究者希望得知，根據分類教學策略，與非典型例性質察覺教學策略，所設計的教學活動，經過實際教學後，學生四種辨識迷思類型的改善程度，故研究者提出的實驗流程如圖 3-2。

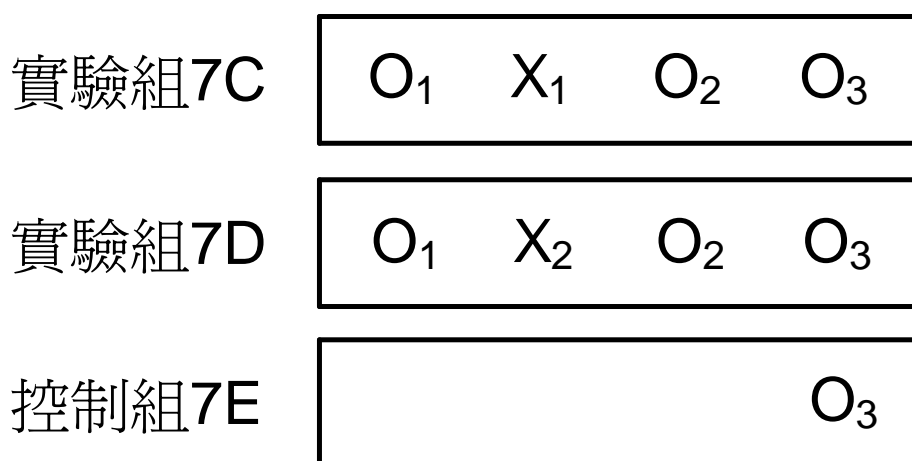


圖 3-2 本研究實驗設計

其中 O_1 表示關於特殊四邊形辨識的前測， O_2 表示關於特殊四邊

形辨識的後測， O_3 表示關於特殊四邊形辨識的延後測， X_1 表示進行四邊形辨識非典型例性質察覺教學活動， X_2 表示進行四邊形辨識分類教學活動。

此設計與前實驗研究法不同之處，在於研究者多了 7C、7D、7E 三組的 O_3 延後測，7C、7D 兩組的延後測，主要目的在於監控 O_2 後測的結果，而 7E 組的延後測，目的則在於提供 7C、7D 兩組的延後測結果的比較，跟對照組比較的方法，是利用將部分題目安排為複本試題，其示意圖見圖 3-3。

安排複本試題的方式			O_3	對照組
O_1	X_1	O_2	O_3	察覺組
O_1	X_2	O_2	O_3	分類組

圖 3-3 照對組的比較方式示意圖

第二節 研究對象

本研究的實驗對象，為研究者以科任老師身分，任教於台北市某公立國中的四個七年級班級，稱為班級 7A 到 7D，以及在非研究者所任教的班級中，隨機抽取一個七年級班級，稱為班級 7E，這五個實驗對象班級，在研究中所進行實驗的部份如下：

7A 班，學生 36 人：

前測問卷預試（依其結果修改前測問卷）

分類教學活動試教（依其結果修改教學活動）

7B 班，學生 32 人：

正式前測

非典型例性質察覺教學活動試教（依其結果修改教學活動）

7C 班，學生 34 人：

正式前測

非典型例性質察覺教學活動實驗

正式後測

正式延後測

7D 班，學生 31 人：

正式前測

分類教學活動實驗

正式後測

正式延後測

7E 班，學生 34 人：

正式延後測

第三節 研究工具

為了達成研究目的，本研究使用四份內容屬於四邊形圖形辨識的評量，作為兩種教學策略的應用成果評估，以下是這四份評量的介紹。

四邊形辨識預試評量

預試評量是為了確認實驗班級學生，對於四邊形辨識的能力與困難，研究者首先以一份開放式的問卷，於前一學年度，也就是九十六學年度的六月，施測於一個七年級班級的學生，內容為要求學生填寫正方形、長方形、菱形、平行四邊形、梯形的定義，以及畫出這些四邊形，由作答的結果，初步評估本校七年級學生程度，與蒐集學生對於特殊四邊形的典型例心象，作為編寫前測評量的參考依據。

四邊形辨識前測評量

研究者以預試評量、自身參與國科會研究計畫的經驗、文獻探討的收穫，針對國中生容易出現的語意、典型例、互斥思維、空間視覺四種易犯的四邊形圖形辨識迷思，分別設計圖形名稱、圖形定義兩種出題導向的前測評量，並於實驗班級 7A，以座號單數施測名稱版前測，座號雙數施測定義版前測，其結果作為正式的前測評量與後續教學活動的依據資料。

正式的前測評量是一份診斷性測驗，用來檢驗參與實驗學生四邊形的辨識迷思，憑藉著 7A 班的施測經驗，融合圖形名稱、圖形定義兩種出題導向在一份評量中，除了確認辨識迷思外，也可以比較

學生在由圖形名稱與圖形定義，這兩個方向思考問題的結果差異。

四邊形辨識後測評量

後測評量是一份總結性評量，為分類與非典型例性質察覺兩個教學策略的應用，做一個結果上的評估，其與前測評量的比較，用來檢視教學活動的實施成效。

四邊形辨識延後測評量

延後測評量是後測評量的複本，作用為檢視在經過一段時間後，教學活動所帶來影響的學習保留程度，同時，延後測也會施測於對照組班級 7E，替教學策略的應用成效，做橫向比較的結果評估。

以下為預試評量的內容與施測結果：

預試問卷共五題，第一題為要求學生寫下正方形的定義，與畫出一個正方形，題目內容見圖 3-4。

請寫出正方形的定義：	請畫出一個正方形：
------------	-----------

圖 3-4 正方形預試試題

結果發現，學生大多能夠表達出，正方形需要有四個直角與四

個相等的邊，敘述方式則如圖 3-5，有些同學會寫出關於面積、對角線性質，如圖 3-6，內容也大多是正確的，多數學生所畫出的正方形，呈現典型例類型的水平擺設方位，如圖 3-7 與圖 3-8。

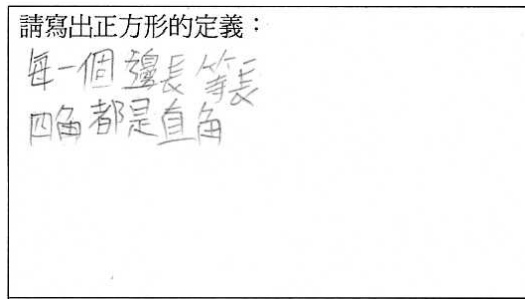


圖 3-5 多數作答正方形定義的方式

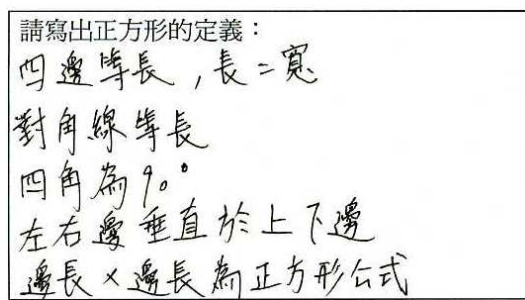


圖 3-6 寫出與正方形相關的幾何知識

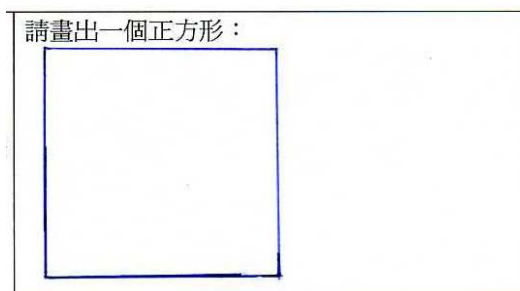


圖 3-7 學生所畫的正方形例一

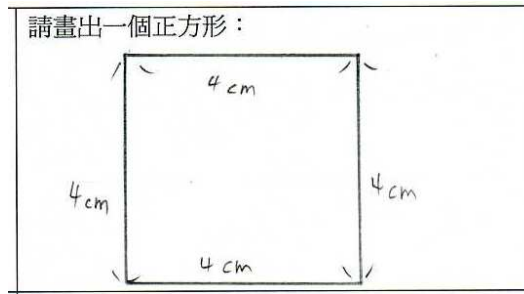


圖 3-8 學生所畫的正方形例二

預試的第二題，是要求學生寫下長方形的定義，與畫一個長方形，內容見圖 3-9。

<p>請寫出長方形的定義：</p>	<p>請畫出一個長方形：</p>
-------------------	------------------

圖 3-9 長方形預試試題

結果發現，學生多數知道長方形必須有四個直角，卻認為長跟寬不能相等，還會特別註明長寬不能相等這件事，如圖 3-10、圖 3-11。

<p>請寫出長方形的定義：</p> <p>對邊等長</p> <p>四角為 90°</p> <p>長 \neq 寬</p> <p>長與寬互相垂直</p> <p>長 \times 寬為長方形公式</p>

圖 3-10 標明長方形長寬不等例一

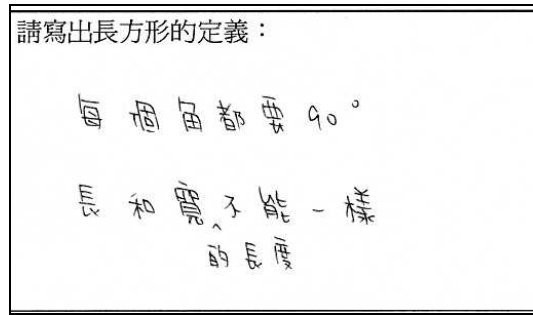


圖 3-11 標明長方形長寬不等例二

多數學生所畫出的長方形，呈現典型例類型的水平擺設方位，如圖 3-12 與圖 3-13。

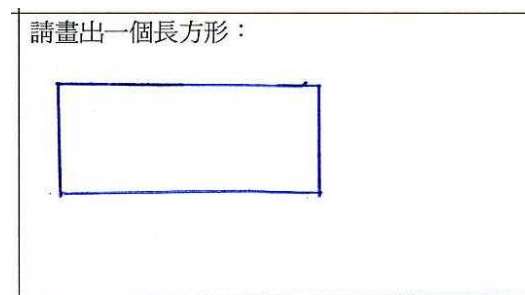


圖 3-12 學生所畫的長方形例一

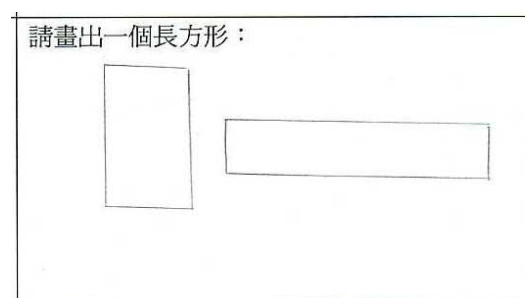


圖 3-13 學生所畫的長方形例二

預試的第三題，是要求學生寫下菱形的定義，與畫出一個菱形，內容見圖 3-14。

<p>請寫出菱形的定義：</p>	<p>請畫出一個菱形：</p>
------------------	-----------------

圖 3-14 菱形預試試題

結果發現，學生對於菱形定義的回答，有四邊等長、對角線等長、對角線垂直這幾種，如圖 3-15 與圖 3-16，也有人答是正方形轉一個邊，如圖 3-17。

<p>請寫出菱形的定義：</p> <p>對角線一樣長</p>

圖 3-15 菱形定義作答方式一

<p>請寫出菱形的定義：</p> <p>1. 兩組等長的對邊。 (或等長的四邊)</p> <p>2. 對角線垂直。</p>

圖 3-16 菱形定義作答方式二

請寫出菱形的定義：

正方形轉一個邊

圖 3-17 菱形定義作答方式三

多數學生心中的菱形，都有典型例迷思現象，需要有一條對角線是水平線，如圖 3-18 到圖 3-21。

請畫出一個菱形：

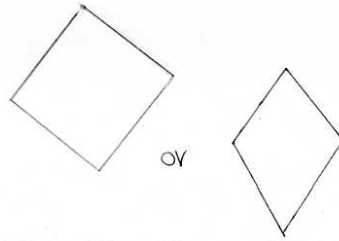


圖 3-18 學生所畫的菱形例一

請畫出一個菱形：

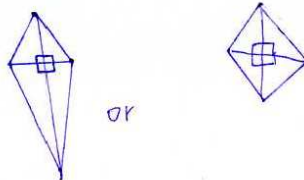


圖 3-19 學生所畫的菱形例二

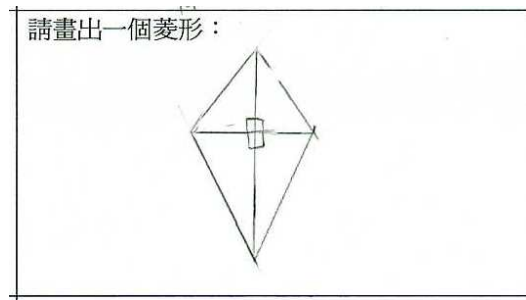


圖 3-20 學生所畫的菱形例三

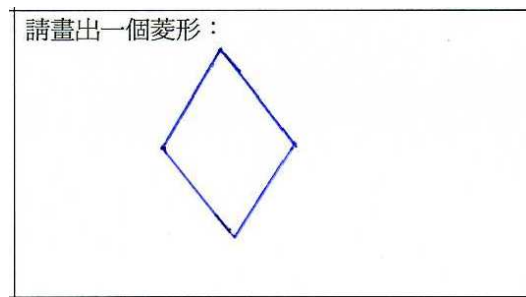


圖 3-21 學生所畫的菱形例四

預試的第四題，是要求學生寫下梯形的定義，與畫出一個梯形，內容見圖 3-22。

<p>請寫出梯形的定義：</p>	<p>請畫出一個梯形：</p>
------------------	-----------------

圖 3-22 梯形預試試題

結果發現，學生對於梯形定義的回答，多數為上下底、上下邊平行，如圖 3-23，也有人會加註梯形需要等腰，如圖 3-24。

請寫出梯形的定義：

上、下底平行

圖 3-23 認為梯形定義是上下底平行

請寫出梯形的定義：

1. 上下底平行。

2. 等腰。

圖 3-24 梯形定義需要等腰的例子

而學生所畫出來的圖形，除了呈現典型例迷思中，將上下底擺放成水平線的現象，多數還會畫出直角與等腰，如圖 3-25 與圖 3-26。

請畫出一個梯形：

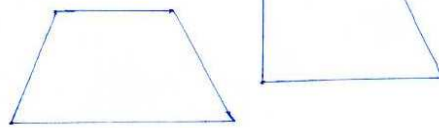


圖 3-25 學生所畫的梯形例一

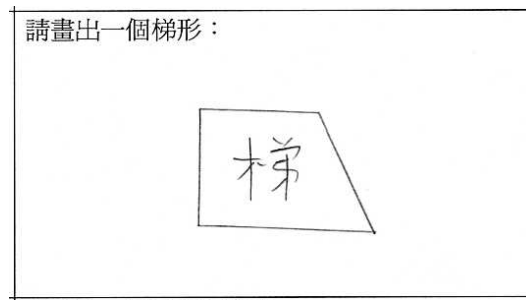


圖 3-26 學生所畫的菱形例二

預試的第五題，是要求學生寫下平行四邊形的定義，與畫出一個平行四邊形，內容見圖 3-27。

<p>請寫出平行四邊形的定義：</p>	<p>請畫出一個平行四邊形：</p>
---------------------	--------------------

圖 3-27 平行四邊形預試試題

結果發現，學生對於定義的回答，多半不離上、下兩邊平行，左右兩邊平行的概念，如圖 3-28 與 3-29，所畫出來的平行四邊形，都呈現典型例迷思類型的現象，將一組對邊擺放成水平方位，如圖 3-30 與 3-31。

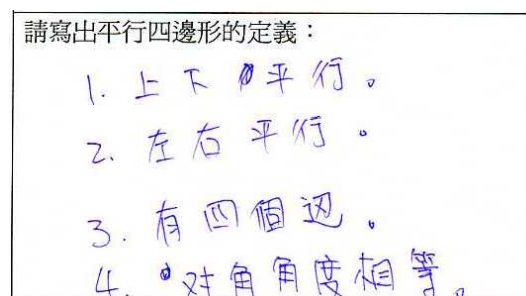


圖 3-28 學生對平行四邊形定義作答例一

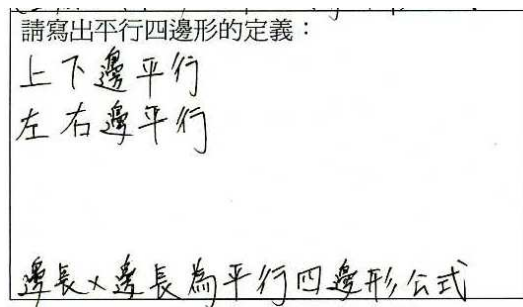


圖 3-29 學生對平行四邊形定義作答例二

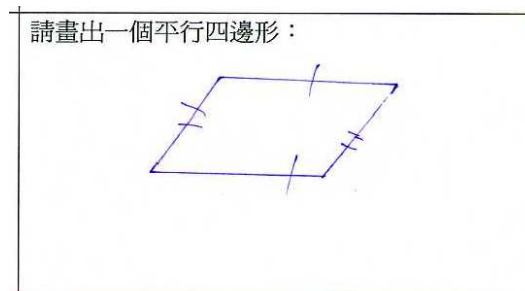


圖 3-30 學生所畫的平行四邊形例一

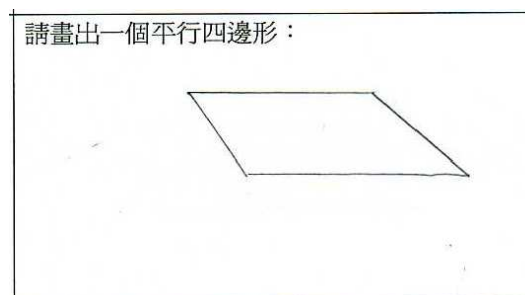


圖 3-31 學生所畫的平行四邊形例二

研究者整理分析這份預試評量的結果，發現雖然七年級學生，對於定義內容用詞的掌握，尚未到精確嚴謹的程度，但在正方形的部份，大多數都能夠抓到正確的圖形定義概念，長方形的部份，雖然認為長與寬不能相等，但都有提及長方形需要有四個直角，菱形則把注意力放在對角線，而平行四邊形與梯形的部份，上下邊、上下底的用詞一再出現，顯示了學生在這兩種四邊形，要求方位必須

是水平的概念心象很強烈。

在根據預試評量結果，要進行編寫前測評量時，研究者產生了這樣一個疑問，當學生在進行圖形辨識時，如果相同的問題以名稱來設計，如圖 3-32，和以定義設計，如圖 3-33，學生的回答會有什麼不一樣？

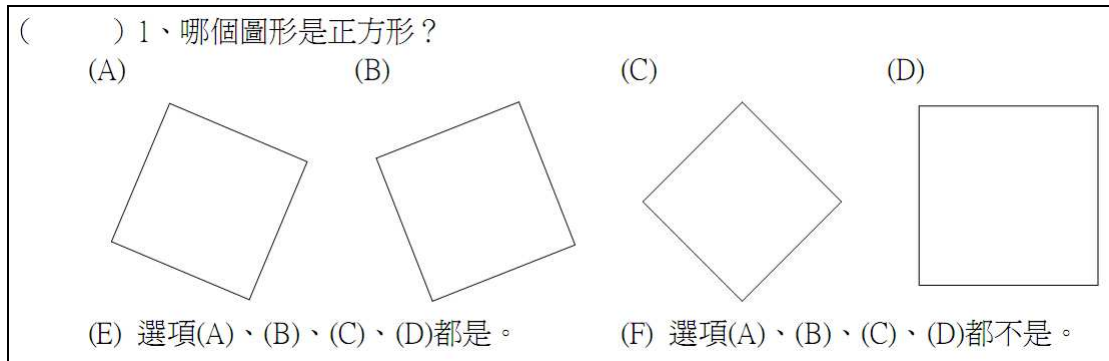


圖 3-32 以名稱設計的問題

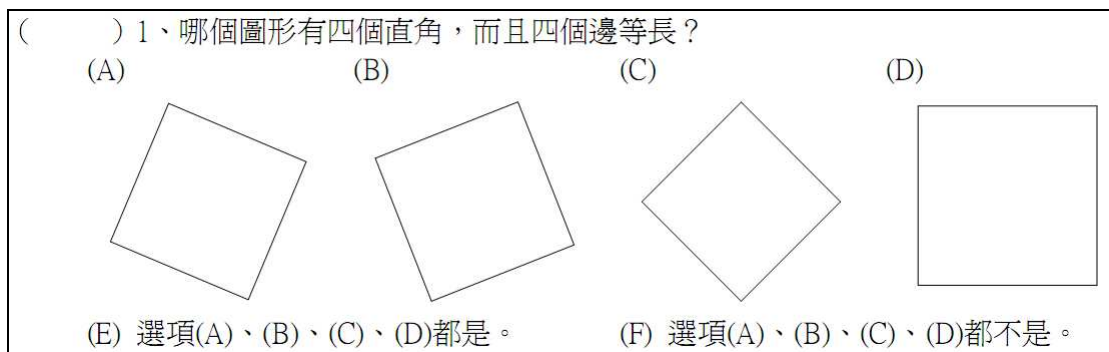


圖 3-33 以定義設計的問題

為了初步解答這個疑問，研究者設計了兩個版本的前測評量預試卷，題目內容選項是一樣的，都有圖形定義、圖形單選、圖形繪製、圖形辨識四個大題，但是一個版本在圖形單選、圖形辨識兩大題，以定義設計題幹敘述，在本研究往後的章節內文，將稱之為定義版，另外一個版本以名稱設計題幹敘述，在本研究往後的章節內文，將稱之為名稱版。

於實驗班級 7A，給座號單數施測名稱版，座號雙數施測定義版，在圖形單選的十個小題中，名稱版與定義版的答對率比較，見圖 3-34，可以發現，定義版本的答對率遠高於名稱版本，當然，這是因為學生普遍存在，長方形長與寬不能相等的概念，卻能很容易挑選出有四個直角的四邊形，所以長方形辨識問題，是造成定義版答對率高於名稱版的重要因素。

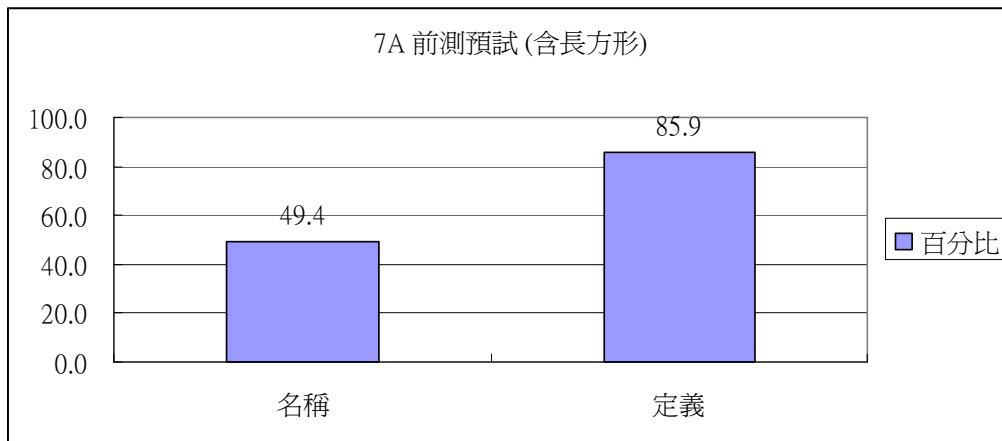


圖 3-34 名稱版與定義版前測結果

但意外的是，如果把挑選長方形的兩小題去掉，定義版本的答對率，還是高於名稱版本，見圖 3-35，這個前測評量預試的結果，讓研究者決定，在編寫前測評量時，將一部分的問題，同時設計定義與名稱兩個版本。

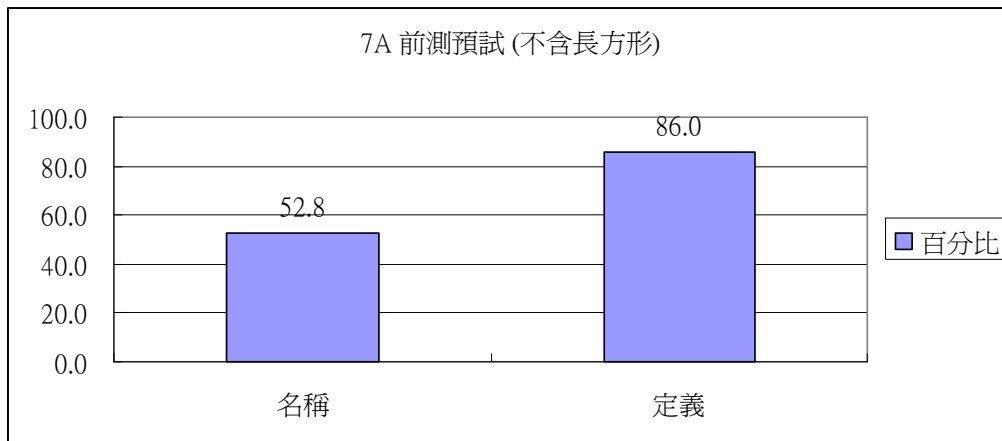


圖 3-35 名稱版與定義版扣除長方形前測結果

實驗使用的前測評量，共有五個大題四十個小題，接下來的部份，將會逐題分析，每個題目所要偵測的辨識迷思。

前測的第一大題，是圖形定義題，總共設計了五個小題，試題內容見圖 3-36。由預試評量中，研究者整理出學生常使用的、貼近學生語句的四邊形定義敘述方式，其中有常見的典型錯誤敘述方式，讓學生來挑選，這個大題可以偵測學生，對於五個特殊四邊形的定義認知上是否正確？

一、圖形定義題

勾選一個最合適的定義於□中，若你認為都不合適，就在「其它」寫下合適的定義。

正方形	<input type="checkbox"/> 有四個直角，而且四個邊等長的四邊形。 <input type="checkbox"/> 有四個直角、四個邊等長，而且上下兩邊要擺成水平的四邊形。 <input type="checkbox"/> 其它：_____。
長方形	<input type="checkbox"/> 有四個直角的四邊形，圖形中長跟寬可以相等，也可以不相等。 <input type="checkbox"/> 有四個直角的四邊形，圖形中長跟寬不能相等。 <input type="checkbox"/> 其它：_____。
菱形	<input type="checkbox"/> 四個邊等長的四邊形。 <input type="checkbox"/> 一條對角線是水平線、另一條對角線是垂直線的四邊形。 <input type="checkbox"/> 正方形將對角線位置變成水平與平行。 <input type="checkbox"/> 其它：_____。
梯形	<input type="checkbox"/> 只有兩個邊平行的四邊形。 <input type="checkbox"/> 上、下底平行，而且將上、下底位置擺成水平的四邊形。 <input type="checkbox"/> 上、下底不等長且平行，另外不平行的兩邊必須等長。 <input type="checkbox"/> 其它：_____。
平行四邊形	<input type="checkbox"/> 上、下兩邊平行，左、右兩邊平行，圖形中可以有直角。 <input type="checkbox"/> 上、下兩邊平行，左、右兩邊平行，圖形中不能有直角。 <input type="checkbox"/> 上、下兩邊平行，左、右兩邊平行，上下邊長不等於左右邊長。 <input type="checkbox"/> 有兩組對邊平行，四個邊可以都不是水平線。 <input type="checkbox"/> 其它：_____。

圖 3-36 前測圖形定義題

前測的第二大題，題型是圖形的單選，總計有十個小題，第一小題所要偵測的，是學生是否受到方位影響，存在正方形必須擺成正正方方、水平擺放的典型例迷思類型，試題內容見圖 3-37。

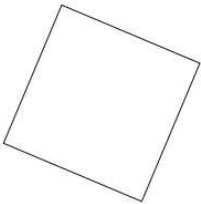
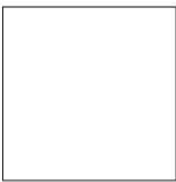
() 1、哪個圖形是正方形？			
(A)	(B)	(C)	(D)
		選項(A)、(B) 兩者都是。	選項(A)、(B) 兩者都不是。

圖 3-37 前測正方形典型例迷思

第二小題的試題內容，見圖 3-38，其中的選項 B，是空間視覺

中的正方形，此題可以偵測學生在四邊形的辨識迷思中，是否存在正方形辨識上，空間視覺的迷思類型。

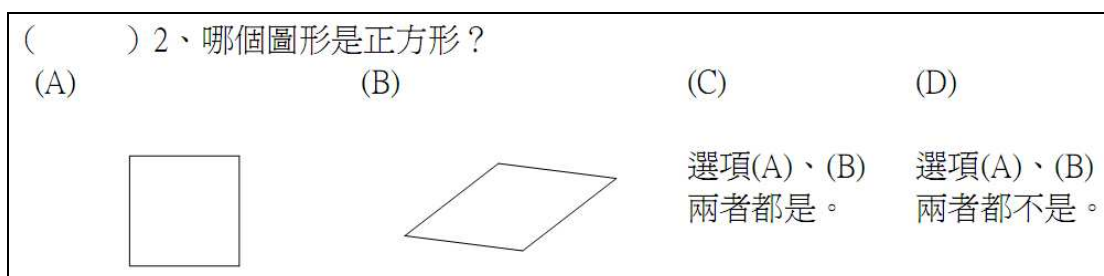


圖 3-38 前測正方形空間視覺迷思

第三小題的試題內容，見圖 3-39，測驗的目的，在學生能否接受正方形也是長方形，本題誤答的學生，可能有互斥思維的辨識迷思。亦可能是認為長方形就是要長、寬不相等，這樣的學生，可以從圖形定義題的作答結果中辨別。

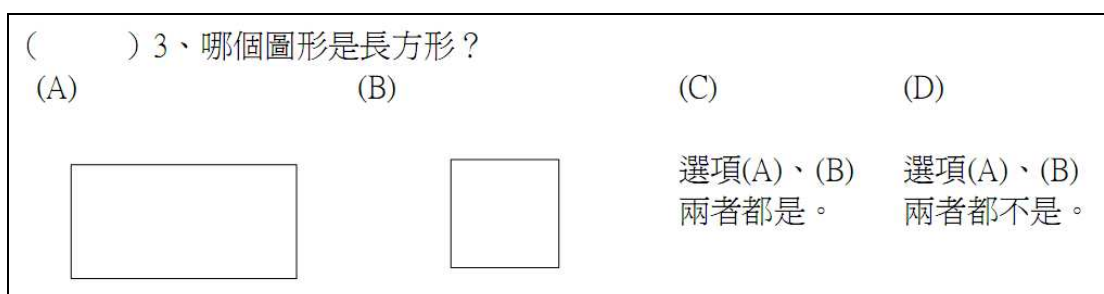


圖 3-39 前測正方形是否為長方形

第四小題的試題內容，見圖 3-40，其中的選項 B，是空間中的長方形的投影圖，此題可以偵測學生在辨識長方形時，是否為辨識迷思的空間視覺類型。

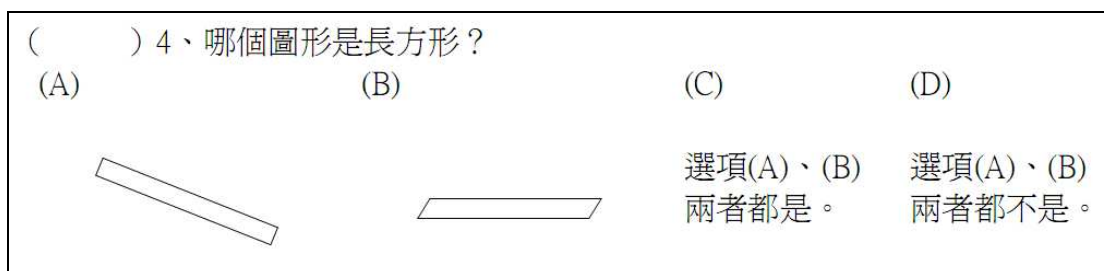


圖 3-40 前測長方形空間視覺迷思

第五小題的試題內容，見圖 3-41，其中的選項 B，是菱形典型例，選項 A 是正方形，認為將一個正方形，擺成選項 A 的方位，就是正方形，擺成選項 B 的方位，就是菱形，這是在菱形辨識問題上，最常見的典型例類型，本題可以偵測這個迷思。

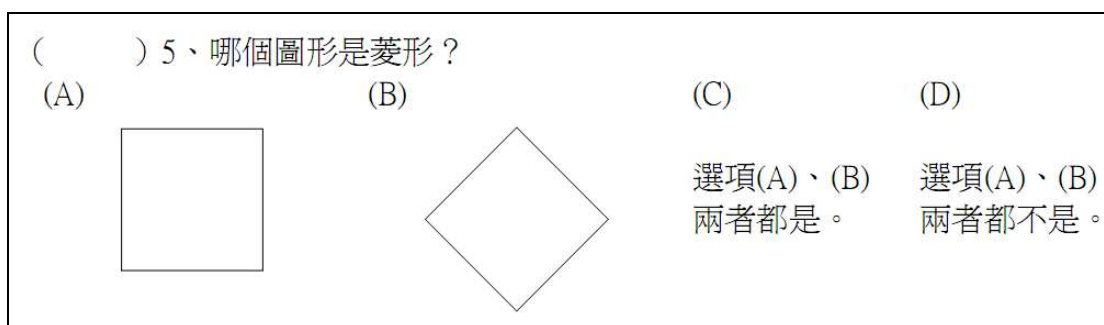


圖 3-41 前測菱形典型例迷思一

第六小題的試題內容，見圖 3-42，其中的選項 A，是菱形典型例，在菱形辨識問題的典型例類型中，有學生會認為，菱形的對角線必須一條是鉛直線，另一條是水平線，即使是同一個圖形，方位不這樣擺放，就不能是菱形，本題可以偵測這個典型例的迷思類型。

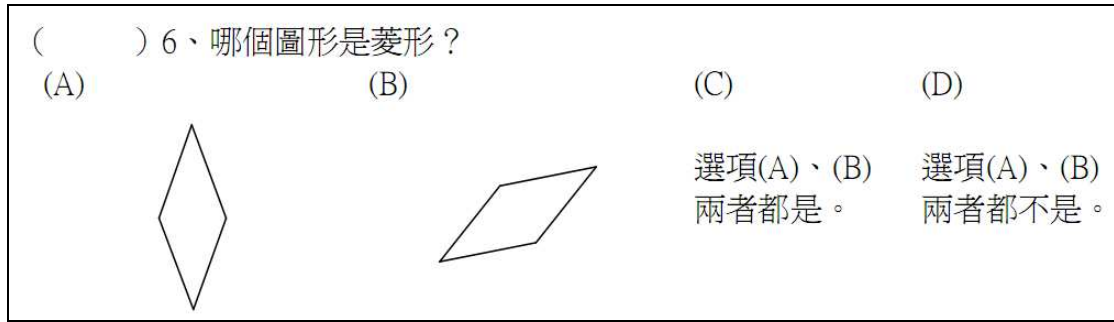


圖 3-42 前測菱形典型例迷思二

第七小題的試題內容，見圖 3-43，其中的選項 A，是梯形典型例，在梯形辨識時，有部份的學生，會認為梯形必須要等腰，否則就不是梯形，本題可以偵測這個梯形的典型例迷思。

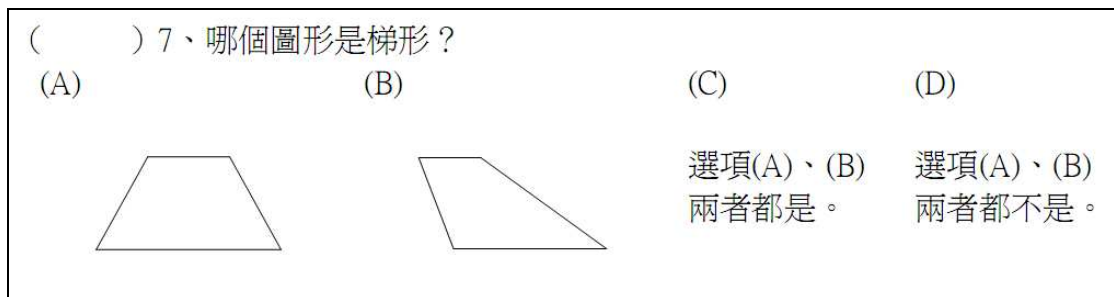


圖 3-43 前測梯形典型例迷思

第八小題的試題內容，見圖 3-44，其中的選項 A，是常使用的平行四邊形，選項 B 是正方形，互斥思維辨識迷思類型，在包含關係的部份，常見到學生會認為，這個圖形既然是正方形了，就不能算是平行四邊形，本題可以偵測到這樣的互斥思維。



() 8、哪個圖形是平行四邊形？			
(A)	(B)	(C)	(D)
		選項(A)、(B) 兩者都是。	選項(A)、(B) 兩者都不是。

圖 3-44 前測平行四邊形與正方形互斥

第九小題的試題內容，見圖 3-45，其中的選項 A 是長方形，選項 B，是常使用的平行四邊形，互斥思維辨識迷思類型，在包含關係的部份，常見學生會認為，這個圖形既然是長方形了，就不能算是平行四邊形，本題可以偵測到這樣的互斥思維。



() 9、哪個圖形是平行四邊形？			
(A)	(B)	(C)	(D)
		選項(A)、(B) 兩者都是。	選項(A)、(B) 兩者都不是。

圖 3-45 前測平行四邊形與長方形互斥

第十小題的試題內容，見圖 3-46，其中的選項 A，是常使用的平行四邊形，選項 B 是菱形，互斥思維辨識迷思類型，在包含關係的部份，常見學生會認為，這個圖形既然是菱形了，就不能算是平行四邊形，本題可以偵測到這樣的互斥思維。



() 10、哪個圖形是平行四邊形？			
(A) 	(B) 	(C) 選項(A)、(B) 兩者都是。	(D) 選項(A)、(B) 兩者都不是。

圖 3-46 前測平行四邊形與菱形互斥

前測的第三大題，題型設計上，使用的方式是是非題，測驗學生四邊形包含關係的認知，題目的內容見圖 3-47，總計有五個小題，本大題的作答內容，可以檢驗學生的互斥思維迷思。

三、圖形判斷是非題




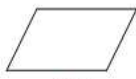
請就圖一到圖五進行是非判斷，正確打○，錯誤打x，每一題可能不只一個○，也可能只有一個或者沒有，只要你認為是正確的選項，就都打○，錯誤就打x。		 圖一	() 圖一是長方形。 () 圖一是菱形。 () 圖一是平行四邊形。 () 圖一是梯形。
 圖二	() 圖二是正方形。 () 圖二是菱形。 () 圖二是平行四邊形。 () 圖二是梯形。	 圖三	() 圖三是正方形。 () 圖三是長方形。 () 圖三是平行四邊形。 () 圖三是梯形。
 圖四	() 圖四是正方形。 () 圖四是長方形。 () 圖四是菱形。 () 圖四是平行四邊形。	 圖五	() 圖五是正方形。 () 圖五是長方形。 () 圖五是菱形。 () 圖五是梯形。

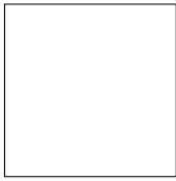
圖 3-47 前測圖形判斷是非題

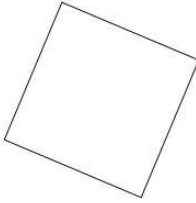
前測的第四大題，題形設計是圖形單選題，總計有十個小題，本大題的選項內容，是將第二大題的試題內容略做調整，把前測評量預試中，名稱與定義兩個版本的概念，融合並且同時施測於一份評量中。

研究者曾找若干位七年級學生，均為實驗學校但非屬於實驗班級，進行小規模的測試，發現同時在一份評量中，相同的試題，設計名稱與定義兩個版本，並不會造成學生回答上的困惑，又可探測到，學生在面對名稱與定義兩種評量方式時，所做出的辨識選擇，所以研究者採取這樣的模式，來設計前測評量，試題的內容見圖 3-48 到圖 3-57。

四、圖形單選題 每題填寫一個最適當的答案

() 1、哪個圖形有四個直角，而且四個邊等長？

(A)


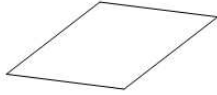
(B)



(C)
選項(A)、(B)
兩者都是。

(D)
選項(A)、(B)
兩者都不是。

圖 3-48 前測正方形典型例述思定義版

() 2、哪個圖形有四個直角，而且四個邊等長？

(A)


(B)


(C)
選項(A)、(B)
兩者都是。

(D)
選項(A)、(B)
兩者都不是。

圖 3-49 前測正方形空間視覺述思定義版

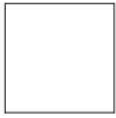

() 3、哪個圖形有四個直角？			
(A)	(B)	(C)	(D)
		選項(A)、(B) 兩者都是。	選項(A)、(B) 兩者都不是。

圖 3-50 前測正方形是否為長方形定義版

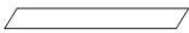

() 4、哪個圖形有四個直角？			
(A)	(B)	(C)	(D)
		選項(A)、(B) 兩者都是。	選項(A)、(B) 兩者都不是。

圖 3-51 前測長方形空間視覺迷思定義版

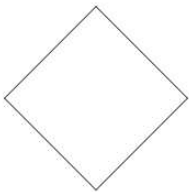
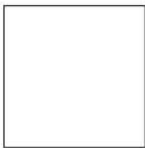
() 5、哪個圖形四個邊等長？			
(A)	(B)	(C)	(D)
		選項(A)、(B) 兩者都是。	選項(A)、(B) 兩者都不是。

圖 3-52 前測菱形典型例迷思一定義版

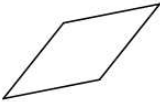

() 6、哪個圖形四個邊等長？			
(A)	(B)	(C)	(D)
		選項(A)、(B) 兩者都是。	選項(A)、(B) 兩者都不是。

圖 3-53 前測菱形典型例迷思二定義版

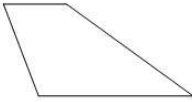
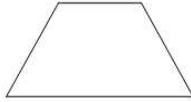
() 7、哪個圖形只有兩個邊平行？			
(A)	(B)	(C)	(D)
		選項(A)、(B) 兩者都是。	選項(A)、(B) 兩者都不是。

圖 3-54 前測梯形典型例迷思定義版



() 8、哪個圖形兩組對邊平行(有兩個邊平行、另外兩個邊也平行)？			
(A)	(B)	(C)	(D)
		選項(A)、(B) 兩者都是。	選項(A)、(B) 兩者都不是。

圖 3-55 前測平行四邊形與正方形互斥定義版

() 9、哪個圖形兩組對邊平行(有兩個邊平行、另外兩個邊也平行)?


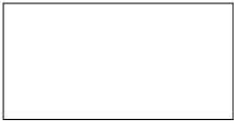
(A)	(B)	(C)	(D)
		選項(A)、(B) 兩者都是。	選項(A)、(B) 兩者都不是。

圖 3-56 前測平行四邊形與長方形互斥定義版

() 10、哪個圖形兩組對邊平行(有兩個邊平行、另外兩個邊也平行)?

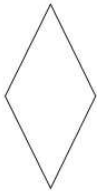

(A)	(B)	(C)	(D)
		選項(A)、(B) 兩者都是。	選項(A)、(B) 兩者都不是。

圖 3-57 前測平行四邊形與菱形互斥定義版

前測的第五大題，題形設計是圖形挑選配合題，有十個小題，要學生從十六個四邊形圖形中，來進行圖形的挑選填寫，四邊形的圖見圖 3-58，題目內容見圖 3-59。

五、圖形挑選配合題

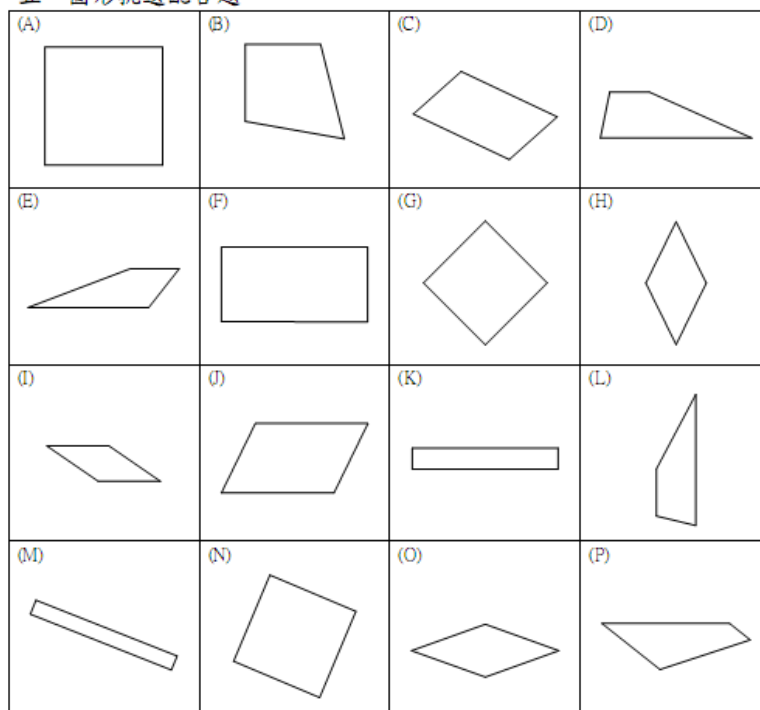


圖 3-58 前測十六個供學生挑選的四邊形

請由(A)~(P)這 16 個圖形，回答以下問題，選項可重複使用。

- 1、挑選出全部的正方形：_____。
- 2、挑選出全部的長方形：_____。
- 3、挑選出全部的菱形：_____。
- 4、挑選出全部的梯形：_____。
- 5、挑選出全部的平行四邊形：_____。
- 6、挑選出全部有四個直角，而且四個邊等長的圖形：_____。
- 7、挑選出全部有四個直角的圖形：_____。
- 8、挑選出全部四個邊等長的圖形：_____。
- 9、挑選出全部只有兩個邊互相平行的圖形：_____。
- 10、挑選出全部有兩組對邊平行(有兩個邊平行、另外兩個邊也平行)的圖形：_____。

圖 3-59 前測圖形挑選題內容

從眾多四邊形圖形中，來進行各種四邊形，或者定義要求圖形的挑選，對於學生來說，是難度較高的評量問題，而這十六個圖形的設計安排，搜羅了正方形、長方形、菱形、平行四邊形、梯形的

典型例，以及各種辨識迷思類型下，常見的錯誤圖形心象，這個大題，能夠鑑別學生辨識四邊形的整體能力，亦可為前五個大題中，所欲偵測的錯誤迷思類型，提供比較與佐證。

學生接受前測評量後，再來會進行兩種教學策略的實驗，實驗的工具是非典型例性質察覺教學活動，以及分類教學活動，這兩份教學活動，將於下一小節介紹，實驗完成後，會進行後測評量與延後測評量，後測評量與延後測評量為總結性評量，研究者已施測前測評量，且完成前測評量的結果統計，進行初步分析後，才開始編寫後測評量，後測評量沒有以定義命題的試題，部分的試題難度較高，接下來為後測評量的介紹，以及每一個試題的考慮之處。

後測評量的類型是總結性評量，共有兩個大題，第一大題為單選題，共計有十一個小題。第一小題，目的在探測，是學生是否受到方位影響，存在正方形必須擺成正正方方、水平擺放的典型例迷思類型。此題規劃為前測評量中，第二大題第一小題的比較試題，試題內容見圖 3-60。

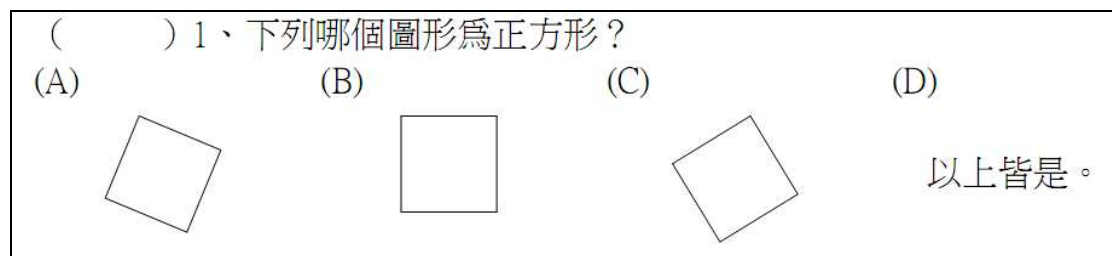


圖 3-60 後測正方形典型例迷思

第二小題題目中的附圖，是正方形的平面投影圖，此題可以偵測，學生在四邊形的辨識迷思中，是否存在正方形辨識上，空間視覺的迷思類型，題目內容見圖 3-61。

() 2、右圖是平面上的一個圖形，它是一個正方形嗎？
 (A) 不是，因為它沒有四個直角。(B) 不是，它是長方形。
 (C) 是，因為它四邊等長。(D) 是，換個角度來看他就是正方形。

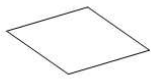


圖 3-61 後測正方形空間視覺迷思

第三小題的測驗目的，在學生能否接受正方形也是長方形，此題使用線段、角的數學符號，難度較高，題目內容見圖 3-62。

() 3、若四邊形 DEFG 是一個長方形， \overline{DE} 為長方形的長， \overline{EF} 為寬，則
 (A) $\overline{DE} > \overline{EF}$ (B) $\angle D$ 、 $\angle E$ 、 $\angle F$ 、 $\angle G$ 均為 90°
 (C) \overline{DE} 與 \overline{EF} 不可以相等 (D) 以上皆是。

圖 3-62 後測文字敘述正方形是否為長方形

第四小題的測驗目的，也是在探測學生，能否接受長方形的長與寬可以相等，此題要學生依據 PQRS 中的線段長度進行判斷，難度較高，本題與第三小題，所欲偵測的概念相同，研究者認為，要能夠接受正方形是長方形的一種，在四邊形辨識的學習上，是學生最不容易接受的，題目內容見圖 3-63。

() 4、右圖四邊形 PQRS 的四個角均為 90° ，則在何種情況下，PQRS 為長方形？
 (A) $\overline{PQ} = 4$ 、 $\overline{QR} = 4$ (B) $\overline{PQ} = 4$ 、 $\overline{QR} = 4.1$
 (C) $\overline{PQ} = 4.1$ 、 $\overline{QR} = 4.1$ (D) 以上皆是。

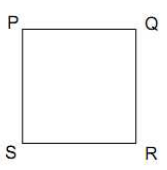


圖 3-63 後測數字敘述正方形是否為長方形

第五小題題目中的附圖，是空間中的長方形的投影圖，此題可以偵測學生在辨識長方形時，是否為辨識迷思的空間視覺類型，題目內容見圖 3-64。

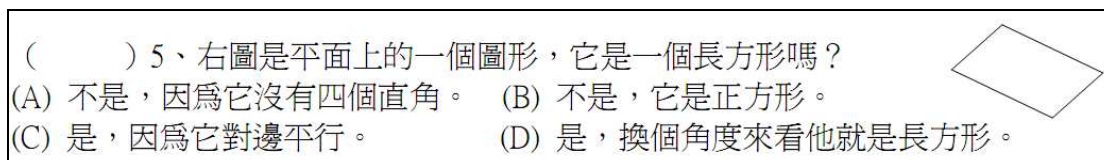


圖 3-64 後測長方形空間視覺迷思

第六小題的測驗目的，是探測學生能否接受，正方形也是長方形的一種，此題亦規劃，與前測評量中第二大題第三小題，作為對照比較的試題，題目內容見圖 3-65。

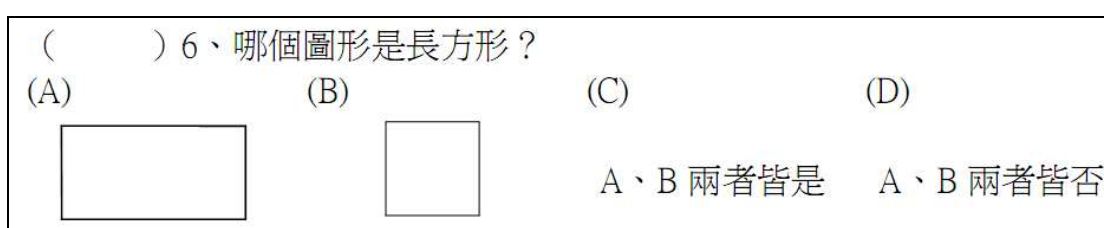


圖 3-65 後測正方形是否為長方形

第七小題的題目內容，見圖 3-66，其中選項 A 是正方形典型例，選項 B 是菱形典型例，在菱形辨識問題的典型例類型中，有學生會認為，菱形的對角線必須一條是鉛直線，另一條是水平線，即使是同一個圖形，方位不這樣擺放，就不能是菱形。此題亦規劃，與前測評量中第二大題第五小題，作為對照比較的試題。

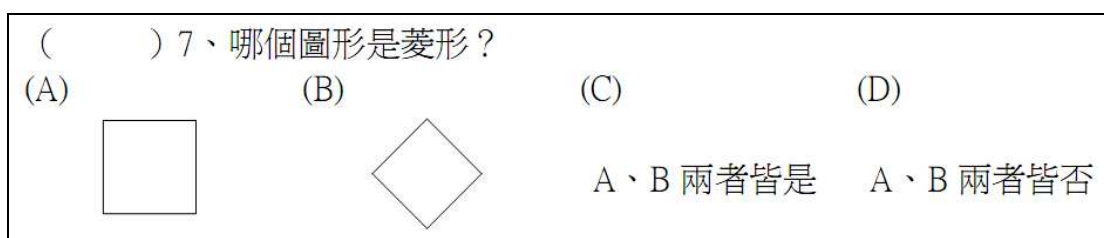


圖 3-66 後測菱形典型例迷思

第八小題的題目內容，見圖 3-67，其中的選項 A，是常使用的平行四邊形，選項 B 是正方形，互斥思維辨識迷思類型，在包含關

係的部份，常見到學生會認為，這個圖形既然是正方形了，就不能算是平行四邊形。此題亦規劃，與前測評量中第二大題第八小題，作為對照比較的試題。

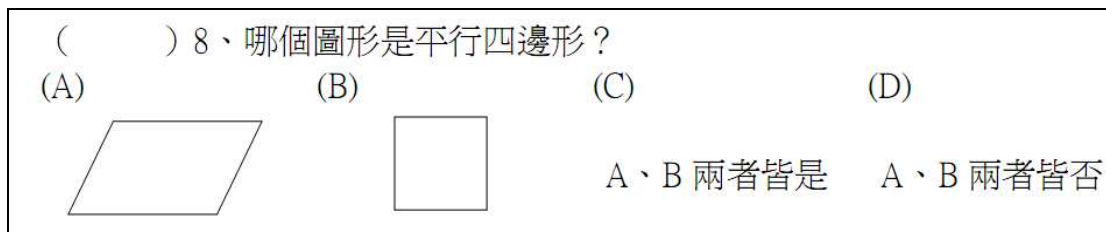


圖 3-67 後測平行四邊形與正方形互斥

第九小題的題目內容，見圖 3-68，其中選項 A、B 都是長方形，本題在偵測學生是否認為，長方形也是平行四邊形。

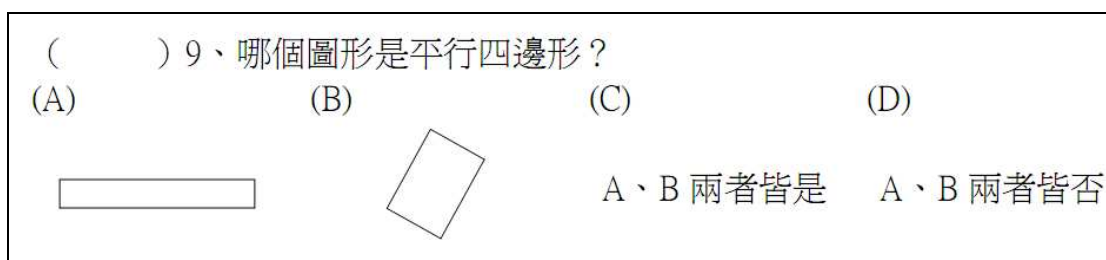


圖 3-68 後測平行四邊形與長方形互斥

第十、十一小題的題目內容，見圖 3-69，其中的選項 A、B 都是菱形，選項 A 的擺設方位，是菱形典型例，選項 B 的擺設方位，是平行四邊形典型例，這兩個小題要探討，關於菱形與平行四邊形的典型例與互斥思維辨識迷思。

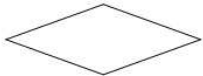
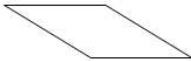
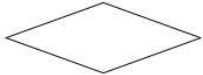

() 10、哪個圖形是菱形？			
(A)	(B)	(C)	(D)
		A、B 兩者皆是	A、B 兩者皆否
() 11、哪個圖形是平行四邊形？			
(A)	(B)	(C)	(D)
		A、B 兩者皆是	A、B 兩者皆否

圖 3-69 後測平行四邊形與菱形互斥

後測的第二大題，題形設計是配合題，有五個小題，要學生從十五個四邊形圖形中，來進行圖形的挑選填寫，四邊形的圖見圖 3-70，題目內容見圖 3-71。

二、配合題 挑選出所有的答案




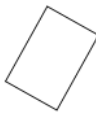





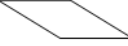



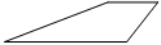
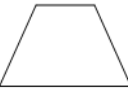
Ⓐ 	Ⓑ 	Ⓒ 	Ⓓ 	Ⓔ 
Ⓔ 	Ⓖ 	Ⓗ 	Ⓙ 	⓫ 
Ⓚ 	Ⓛ 	Ⓜ 	Ⓝ 	Ⓞ 

圖 3-70 後測十五個供學生挑選的四邊形

請由(A)~(O)這 15 個圖形，回答以下問題，選項可重複使用。

1、挑選出全部的正方形：	_____
2、挑選出全部的長方形：	_____
3、挑選出全部的菱形：	_____
4、挑選出全部的梯形：	_____
5、挑選出全部的平行四邊形：	_____

圖 3-71 後測配合題內容

從眾多四邊形圖形中，來進行各種四邊形的挑選，對於學生來說，是難度較高的評量問題，而這十五個圖形的設計安排，搜羅了正方形、長方形、菱形、平行四邊形、梯形的典型例，以及各種辨識迷思類型下，常見的錯誤圖形心象，這個大題，能夠鑑別學生辨識四邊形的整體能力。

亦可替第一大題，所欲偵測的錯誤迷思類型，提供比較與佐證。此題也規劃，與前測評量中第五大題，作為對照比較的試題。

延後測評量，是後測評量的複本試題，每一題所對應的題目，均為後測評量中的同一題，試題考慮之處也相同，試題內容見圖 3-72 到圖 3-84。

一、單選題 請選出最適合的答案

() 1、下列哪個圖形為正方形？

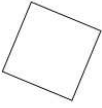
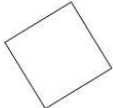

(A)	(B)	(C)	(D)
			以上皆是。

圖 3-72 延後測正方形典型例迷思

() 2、右圖是平面上的一個圖形，它是一個正方形嗎？
 (A) 是，因為它有四邊等長。(B) 是，換個角度來看他就是正方形。
 (C) 不是，它是長方形。(D) 不是，因為它沒有四個直角。

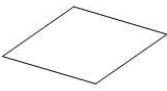


圖 3-73 延後測正方形空間視覺迷思

() 3、若四邊形 DEFG 是一個長方形， \overline{DE} 為長方形的寬， \overline{EF} 為長，則
 (A) \overline{DE} 長度應該小於 \overline{EF} 長度 (B) $\angle D$ 、 $\angle E$ 、 $\angle F$ 、 $\angle G$ 均為 90°
 (C) \overline{DE} 與 \overline{EF} 不可以等長 (D) 以上選項都對。

圖 3-74 延後測文字敘述正方形是否為長方形

() 4、右圖四邊形 PQRS 的四個角均為 90° ，則在何種情況下，PQRS 為長方形？
 (A) $\overline{PQ} = 6$ 、 $\overline{QR} = 6$ (B) $\overline{PQ} = 6$ 、 $\overline{QR} = 6.1$
 (C) $\overline{PQ} = 6.1$ 、 $\overline{QR} = 6.1$ (D) 選項 A、B、C 都可以。

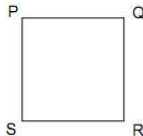


圖 3-75 延後測數字敘述正方形是否為長方形

() 5、右圖是平面上的一個圖形，它是一個長方形嗎？
 (A) 不是，因為它沒有四個直角。(B) 是，因為它對邊平行。
 (C) 不是，它是正方形。(D) 是，換個角度來看他就是長方形。

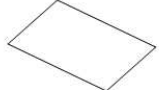


圖 3-76 延後測長方形空間視覺迷思



() 6、哪個圖形是長方形？
 (A)  (B)  (C) A、B 兩者皆是 (D) A、B 兩者皆否

圖 3-77 延後測正方形是否為長方形

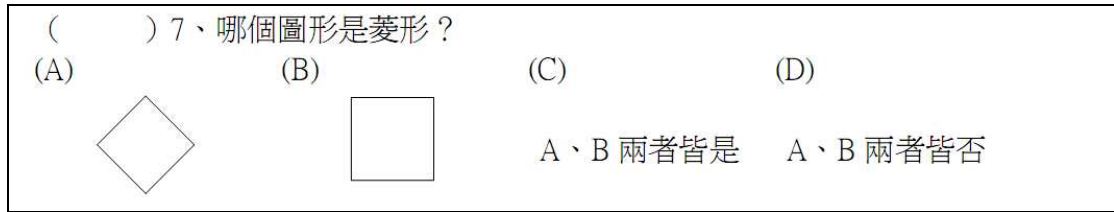


圖 3-78 延後測菱形典型例迷思

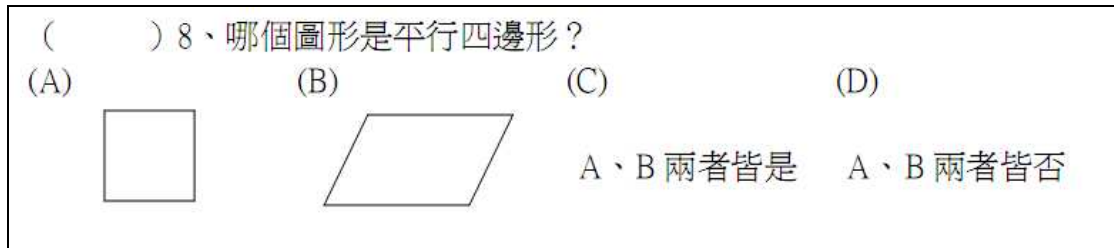


圖 3-79 延後測平行四邊形與正方形互斥

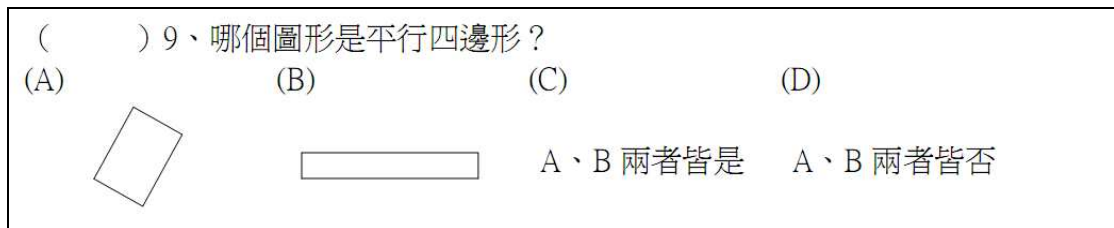


圖 3-80 延後測平行四邊形與長方形互斥

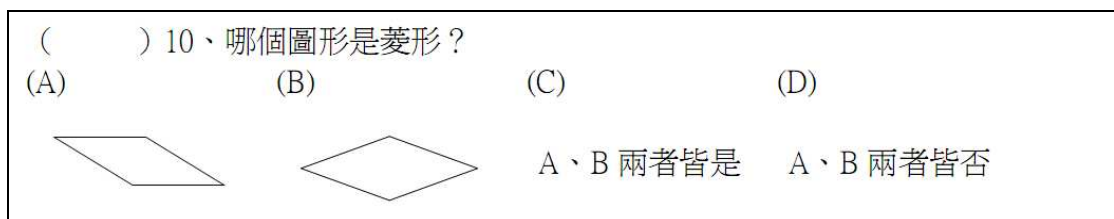


圖 3-81 延後測平行四邊形與菱形互斥

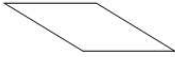

()	11、哪個圖形是平行四邊形？
(A)	(B) (C) (D)
	
	A、B 兩者皆是 A、B 兩者皆否

圖 3-82 延後測平行四邊形與菱形互斥

二、配合題 挑選出所有的答案





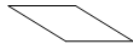








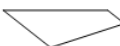

① 	② 	③ 	④ 	⑤ 
⑥ 	⑦ 	⑧ 	⑨ 	⑩ 
⑪ 	⑫ 	⑬ 	⑭ 	⑮ 

圖 3-83 延後測十五個供學生挑選的四邊形

請由(A)~(O)這 15 個圖形，回答以下問題，選項可重複使用。	
1、挑選出全部的正方形：	
2、挑選出全部的長方形：	
3、挑選出全部的菱形：	
4、挑選出全部的梯形：	
5、挑選出全部的平行四邊形：	

圖 3-84 延後測配合題內容

為了達成研究目的，本研究使用兩份內容屬於四邊形圖形辨識的教學活動，實驗非典型例性質察與分類兩種教學策略，以下是這兩份教學活動的介紹。

非典型例性質察覺教學活動

此教學活動，為研究者根據非典型例性質察覺教學策略所編寫的，設計核心理念是讓學生從大量非典型例中，觀察並紀錄正方形、長方形、菱形、平行四邊形、梯形的性質，再以討論互動的教學方式，達成破除圖形辨識迷思。

為了提升非典型例性質察覺教學活動的實施品質，研究者初步編寫的教學活動，會在班級 7A 進行試教，並由試教的結果回饋，修改教學活動內容後，於班級 7C 進行正式的實驗。

分類教學活動

此教學活動，為研究者根據分類教學策略所編寫的，設計核心理念，是讓學生根據分類準則，實際操作分類四邊形圖卡，藉以釐清圖形性質，改善圖形辨識迷思。

為了提升分類教學活動的實施品質，研究者初步編寫的教學活動，會在班級 7B 進行試教，並由試教的結果回饋，修改教學活動內容，於班級 7D 進行正式的實驗。

研究者身兼教學活動設計者與執行者，在初步設計完成後，兩個教學活動都有進行試教，由實際教學增進研究者執行的掌握，另一方面，收回學生所填寫的教學活動學習單，瞭解學生使用學習單的情況，從試教教學感受與學習單回饋，修改並建立正式實驗所需要的教學活動，以下介紹兩種教學活動的內容。

非典型例性質察覺教學活動內容

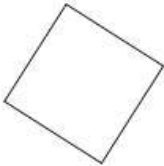
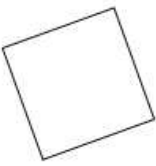


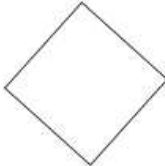
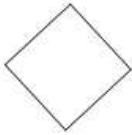

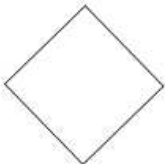
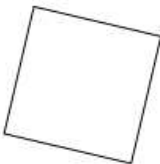
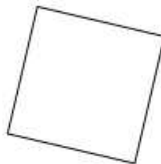
非典型例性質察覺教學活動，設計的想法，是讓學生觀察分析

非典型例圖形的構成元素，從中察覺圖形的性質，經過教學討論後，形成圖形的定義，最後藉由文字記錄定義敘述，進一步理解圖形定義的概念。

教學活動的進行方式則為，請學生觀察多個特殊四邊形的非典型例，要求學生找出這些非典型例的共通性質，並且把這些共通性紀錄下來，等待大多數學生寫出這些共通性質後，讓學生發表自己所發現的共通性質。

此刻，進入全班討論，探索所發現的性質，是否真的是這些非典型例所共有？教學者是處於一個引導的地位，將學生討論的共通性質，統整成正方形、長方形、菱形、平行四邊形、梯形的定義。

在五組圖形都討論完後，請學生於學習單上，填寫自己在察覺討論過後，所認為的正方形、長方形、菱形、平行四邊形、梯形的定義。以下是教學活動學習單的使用流程，與討論每個問題時，可能發生的情況，和應注意的細節。

甲			【	】形
				
				

請寫出上列圖形的共同特徵，（至少三點）。

圖 3-85 正方形非典型例性質察覺

在發下學習單後，首先進行的是正方形非典型例性質察覺，學習單內容見圖 3-85，請學生於空白處填寫甲部份的圖形共通特徵，剛開始學生還沒進入狀況，填寫速度會比較慢，問題也會比較多。

最可能發生的提問是，老師，要填什麼？怎麼填？這個時候教學者適當的回答是，只要你觀察到的，是這十個圖形都有的共通特徵，就把它寫下來，右上角的空格，先不要管它。

等待學生大致填寫完之後，開始進行討論，教學者應視班級的特質，決定討論的模式，研究者採取的方式是，請同學自由舉手發表觀察到的共通特徵，一人講一個，並讓全班同學判斷，所回答的特徵是否確實為十個圖形都有的。

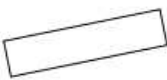
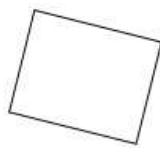
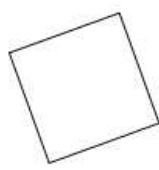
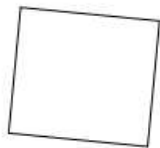
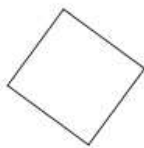
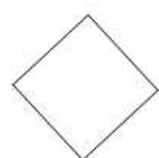

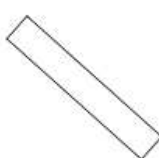
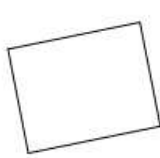

若學生回答的特徵與數學性質無關，例如這些圖形的邊都是黑色的之類，教學者可以回答，你講得沒有錯，但老師希望大家回答

的是，與圖形結構有關的數學特徵，以後這一類的答案，就不要發表了。

等到學生想不出來更多的共同特徵後，此刻，教學者要進行一個拋問，那麼我們可以把這些圖形的名稱，叫做什麼形？在甲部份時，學生通常會沒有異議的回答，正方形。

教學者可以接著問，確定每一個圖形都是正方形嗎？連對角線擺成一條水平一條垂直的，也是正方形嗎？學生會有一部份的聲音，會回答，那是菱形，也會有另外一部份人回答，正方形也是菱形。

教學者順著學生的回答，適時拋問，各位同學，想一想，什麼樣的圖形可以叫做正方形？拋問完後，將學生的意見統整為，有四個直角，而且四個邊等長的四邊形，就是正方形，最後要學生檢查，是否這十個圖形都符合有四個直角，而且四個邊等長？確認無誤後，讓學生在右上角填入正方形。

乙		【 形		
				
				

請寫出上列圖形的共同特徵，（至少三點）。

圖 3-86 長方形非典型例性質察覺




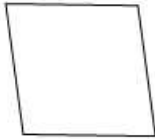


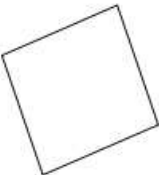
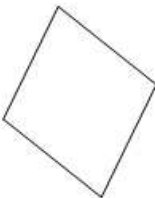

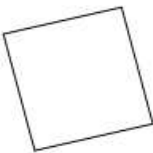
經過甲部份的填寫與討論後，學生多能上手明白學習單如何運作，進入填寫乙部份，也就是長方形非典型例性質察覺，學習單內容見圖 3-86。

教學進行方式相同，在填寫完共同特徵後，讓同學發表所觀察到的特徵，教學者與全班同學，一起進行判斷與修正，經過充分討論，教學者於適當時機，發出拋問，那麼我們可以把這些圖形的名稱叫做什麼形？乙部份在進行到此時，回答長方形，與不對啦，有些是正方形不是長方形，兩種聲音都會出現。

研究者認為，適當的統整方式，是請學生判斷，是否這十個圖形都有四個直角？判斷完畢後，再拋問，如果長方形的定義是，有四個直角的四邊形，那麼乙部分的圖形，是不是都是長方形？

此刻多數學生，會回答是，這個時候教學者可以採取的總結論

述是，雖然數學課本有提到，有四個直角的四邊形，就是長方形，但過去你們的生活經驗，會認為正方形雖然有四個直角，卻不能算長方形，而一但進入數學的領域時，就要以圖形的定義，來判斷圖形，所以乙部份的圖形，都是長方形。

丙		【 】形		
				
				

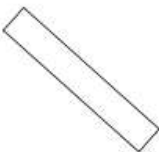

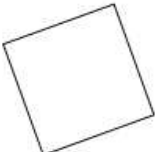


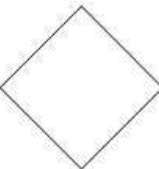
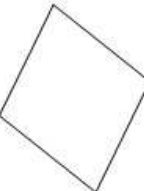

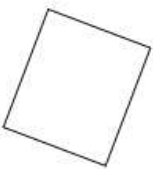
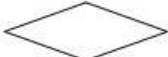
請寫出上列圖形的共同特徵，（至少三點）。

圖 3-87 菱形非典型例性質察覺

下個階段，是菱形非典型例性質察覺，學習單內容見圖 3-87，首先請學生填寫圖形的共通特徵，一樣的模式，在填寫完共同特徵後，讓同學發表填寫內容，教學者與全班同學，一起進行判斷與修正，一個段落後，教學者發出拋問，那麼我們可以把這些圖形的名稱叫做什麼形？學生會回答，菱形。

教學者可以接著問，確定每一個圖形都是菱形嗎？連第一排和第二排的最後一個圖形，也是菱形嗎？拋問完後，將學生的意見統整為，四個邊等長的四邊形，就是菱形，最後要學生檢查，是否這十個圖形都符合四個邊等長？確認無誤後，讓學生在右上角填入菱

形。

丁		【 形		
				
				

請寫出上列圖形的共同特徵，（至少三點）。

圖 3-88 平行四邊形非典型例性質察覺

再來，是平行四邊形非典型例性質察覺，學習單內容見圖 3-88，填寫觀察到的圖形共通特徵後，方式一樣，讓同學發表填寫內容，充分表達後，教學者與全班同學，再一起進行判斷與修正。

丁部份的圖形，有九個是平行四邊形的非典型例，上排第二個圖形，雖然是平行四邊形典型例，同時也是菱形，這個圖形的安排用意，是希望刺激學生能夠聯想到，這些圖形的共同特徵，為都有兩組對邊平行。

若學生的發表回答中，有出現，它們都有兩組對邊平行，教學者就可以順著這樣的回答，來介紹何謂對邊與對邊平行？並且要學生檢視，是否這十個圖形，都符合有兩組對邊平行。

若學生發表的意見，沒有出現有兩組對邊平行的共同特徵回答

內容，則教學者必須介入，進行對邊的講解，與檢視兩組對邊平行的判斷。

如同長方形的總結方法，教學者在學生檢視完成後，提出平行四邊形的定義，就是有兩組對邊平行的四邊形，並要學生思考，正方形、長方形、菱形是否都符合這個定義？檢驗完成後，即可介紹，正方形、長方形、菱形，也都算是平行四邊形。

戊			【 形	

請寫出上列圖形的共同特徵，（至少三點）。

圖 3-89 梯形非典型例性質察覺

最後的階段，是梯形非典型例性質察覺，學習單的內容見圖 3-89，教學進行到這個時候，學生已經很熟悉學習單的使用模式，也在丁部份的講解時，再一次認識到何謂對邊。

教學者依舊於填寫完共同特徵後，讓同學發表所觀察到的，再與全班同學一起進行判斷與修正。

由於有了對邊平行的判斷經驗，發現到戊部分圖形的共同特

徵，是只有一組對邊相等，並不會很困難，教學者便可順著學生的回答，統整出，梯形，指得就是只有一組對邊相等的四邊形。

五個部份都完成之後，也到了學習單的尾聲，填寫心得整理，內容見圖 3-90，教學者此刻要求學生用文字記錄，把正方形、長方形、菱形、平行四邊形、梯形，就是怎樣的圖形？這個定義敘述形成的過程，對於學生概念定義整合，相當有幫助。

心得整理	
由 甲 部分的討論，我們得到，【	】形，就是：
<hr/>	
由 乙 部分的討論，我們得到，【	】形，就是：
<hr/>	
由 丙 部分的討論，我們得到，【	】形，就是：
<hr/>	
由 丁 部分的討論，我們得到，【	】形，就是：
<hr/>	
由 戊 部分的討論，我們得到，【	】形，就是：
<hr/>	

圖 3-90 非典型例察覺心得整理

分類教學活動內容

分類教學活動，設計的想法，是依據性質準則來判斷，實際利用繩子，將四邊形圖卡進行分類，分類結果完成之後，經過適當問題安排與教學討論，釐清圖形的概念定義，進而瞭解四邊形的包含關係。

教學活動的進行方式則為，請學生觀察二十個四邊形圖卡，並

利用兩種顏色的繩子，圖卡與繩子見圖 3-91，來操作三個單準則分類，以及兩個雙準則分類，並將分類結果記錄下來後，參與命名問題。

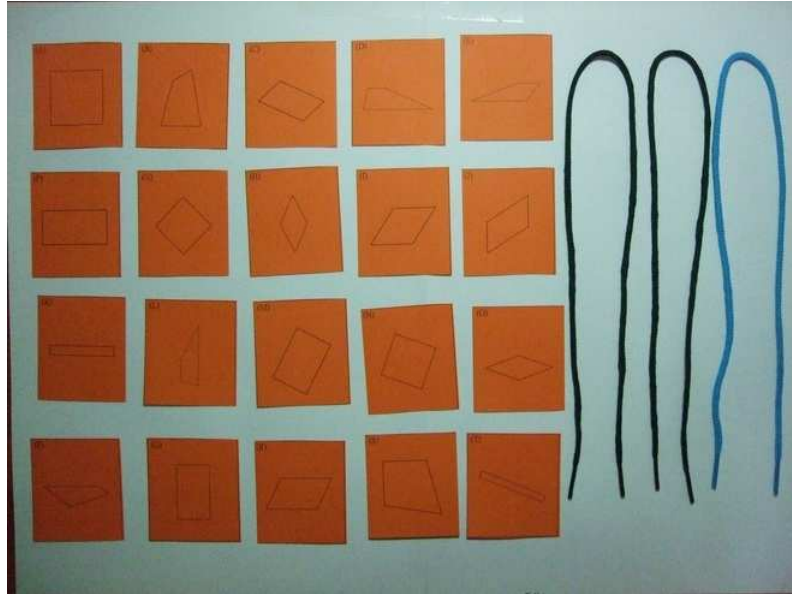


圖 3-91 分類圖卡與繩子

第一個要進行的，是單準則分類操作，依據為四邊形有沒有四個直角？教學者要學生，將有四個直角的四邊形分在繩子的一邊，沒有四個直角的四邊形分在繩子的另一邊，並紀錄結果。學習單的內容見圖 3-92。

分類準則：四邊形有沒有四個直角？
請拿出一條繩子，將有四個直角的四邊形分在繩子的一邊，沒有四個直角的四邊形分在繩子的另一邊，並將你分出來的結果畫在下方：

圖 3-92 分類準則有沒有四個直角

此時學生正在熟悉何謂將圖卡分類，速度會比較緩慢，教學者應該詳細的解說分類規則，以及如何執行，並巡視是否大多數學生理解規則，而且成功的執行。

依據研究者進行分類教學活動試教的經驗，學生雖然剛開始的進行速度慢，但並不是感覺困難而學不會，只是沒接觸過不熟悉，某些同學會需要教學者協助，通常只要在需要幫助的學生身邊，實際示範分一兩張圖卡，他就會理解如何分類，有了第一次分類的經驗，往後的分類準則教學活動進行會很流暢。

大多數學生完成圖卡分類後，排出的結果會如圖 3-93，教學者可令一兩位動作較為迅速，且完成結果正確的同学，至黑板上寫出自己的分類結果，供全班同學檢核，然後師生再一起進行命名的討論。

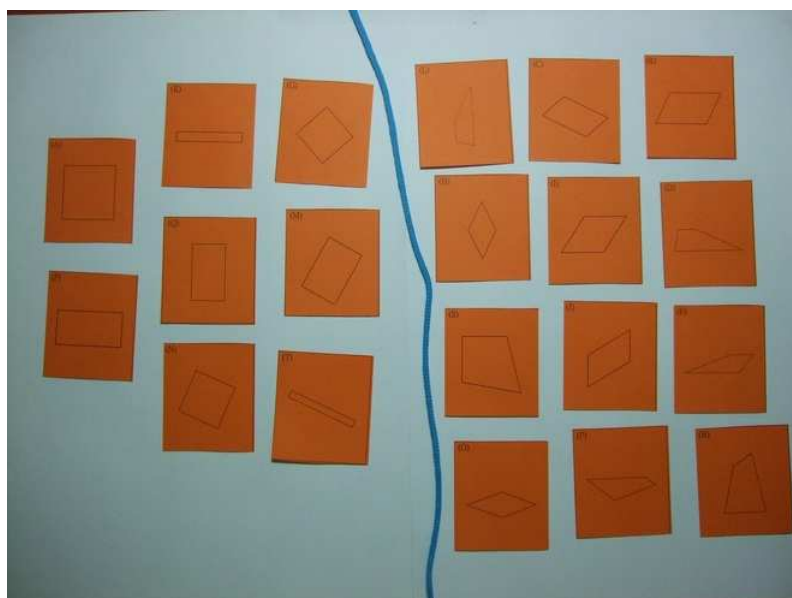


圖 3-93 有沒有四個直角分類完成

第一個分類準則，最後要替有四個直角的四邊形，以及沒有四個直角的四邊形命名，命名的學習單內容見圖 3-94，通常學生會替有四個直角的四邊形命名為長方形，研究者的試教經驗中，也出現過直角形或者直角四邊形命名回答。

但教學者所需要做的，是引導學生瞭解，在數學上，把有四個

直角的四邊形，命名為長方形，並不是直角形或者直角四邊形。在沒有四個直角的四邊形的部份，學生容易出現命名困難，教學者可以使用非長方形這個名稱，學生通常能夠接受這個名稱。

你覺得有四個直角的四邊形可以叫做【 】， 沒有四個直角的四邊形可以叫做【 】。
--

圖 3-94 有無四個直角的四邊形命名

第二個分類操作，要進行的是單準則分類，內容為四邊形有沒有四個相等的邊？學習單的敘述見圖 3-95。教學者請學生，將有四個相等的邊的四邊形分在一邊，有四個相等的邊的四邊形，分在另一邊，並紀錄結果。

分類準則：四邊形有沒有四個相等的邊？ 請拿出一條繩子，將有四個相等的邊的四邊形分在繩子的一邊，沒有到四個相等的邊的四邊形分在繩子的另一邊，並將你分出來的結果畫在下方：
--

圖 3-95 分類準則有沒有四個等邊

大多數學生完成圖卡分類後，排出的結果會如圖 3-96，教學者可令一兩位動作較為迅速，且完成結果正確同學，至黑板上寫出自己的分類結果，供全班同學檢核，然後師生再一起進行該如何命名的討論。

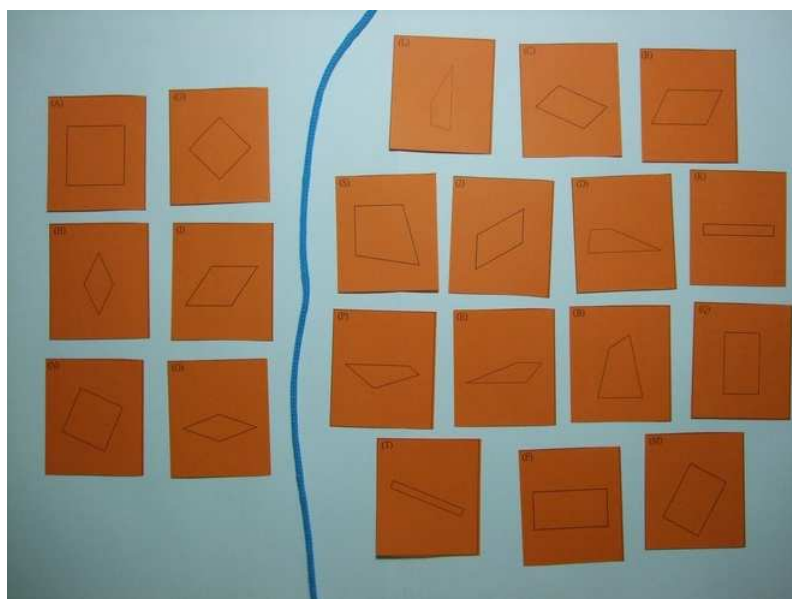


圖 3-96 有沒有四個等邊分類完成

第二個分類準則，最後要替有四個相等的邊的四邊形，以及沒有四個相等的邊的四邊形命名，命名的學習單內容見圖 3-97，通常學生會替有四個相等的邊的四邊形，命名為菱形，由於有過第一個分類準則的命名經驗，學生此時通常會毫無遲疑的，將沒有四個相等的邊的四邊形，命名為非菱形。

你覺得有四個相等的邊的四邊形可以叫做【 】，
沒有四個相等的邊的四邊形可以叫做【 】。

圖 3-97 有無四個等邊的四邊形命名

第三個分類操作，要進行的是單準則分類操作，學習單的敘述見圖 3-98。，四邊形有幾組平行邊？教學者要請學生將拿出兩條繩子，將四邊形分成三個區域，一塊區域是沒有任何一組平行邊的四邊形，一塊區域是只有一組平行邊的四邊形，一塊區域是有兩組平行邊的四邊形，並紀錄結果。

分類準則：四邊形有幾組平行邊？

請拿出兩條繩子，將四邊形分成三個區域，一個是沒有任何一組平行邊的四邊形，一個是只有一組平行邊的四邊形，一個是有兩組平行邊的四邊形，並將你分出來的結果畫在下方：

圖 3-98 分類準則有幾組平行邊

大多數學生完成圖卡分類後，排出的結果會如圖 3-99，教學者可令一兩位動作較為迅速，且完成結果正確同學，至黑板上寫出自己的分類結果，供全班同學檢核，然後師生再一起進行該如何命名的討論。

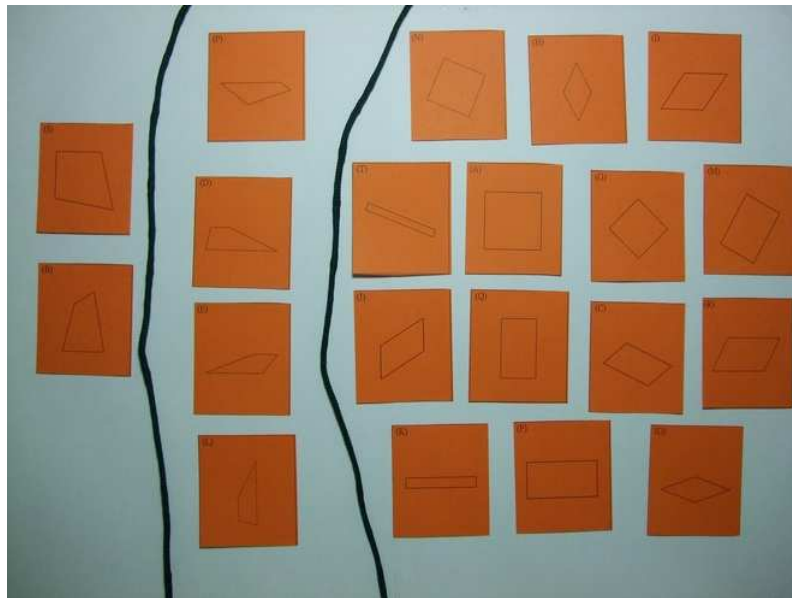


圖 3-99 幾組平行邊分類完成

第三個分類準則，最後要替恰有一組平行邊的四邊形，以及有兩組平行邊的四邊形命名，命名的學習單內容見圖 3-100，基於過去的學習經驗，會有學生替恰有一組平行邊的四邊形命名為梯形，替有兩組平行邊的四邊形命名為平行四邊形，教學者可以贊同這個命名，並且正式介紹。

你覺得恰有一組平行邊的四邊形可以叫做【 】,
有兩組平行邊的四邊形可以叫做【 】。

圖 3-100 有幾組平行邊的四邊形命名

第四個分類操作，是雙準則分類操作，同時進行分隔有四個直角的四邊形，與沒四個直角的四邊形，與分隔有四個相等的邊的四邊形，與沒四個相等的邊的四邊形，學習單的敘述見圖 3-101。

教學者請學生進行分類，並紀錄分類結果，這個時候，某部分學生會出現疑惑，疑惑主要在於不瞭解同時進行的意思，教學者可就同時進行分類，做更詳細解釋與親身示範。

分類準則：

①分隔有四個直角的四邊形，與沒四個直角的四邊形。

②分隔有四個相等的邊的四邊形，與沒四個相等的邊的四邊形。

請拿出不同顏色的兩條繩子，其中一條繩子，將有四個直角的四邊形分在繩子的一邊，沒有四個直角的四邊形分在繩子的另一邊。另外一條繩子，將有四個相等的邊的四邊形分在繩子的一邊，沒有到四個相等的邊的四邊形分在繩子的另一邊，兩個規則要同時進行，將你分出來的結果畫在下方：

圖 3-101 雙準則分類操作一

大多數學生完成圖卡分類後，排出的結果會如圖 3-102，教學者可令一兩位動作較為迅速，且完成結果正確同學，至黑板上寫出自己的分類結果，供全班同學檢核，然後師生再一起進行該如何命名的討論。

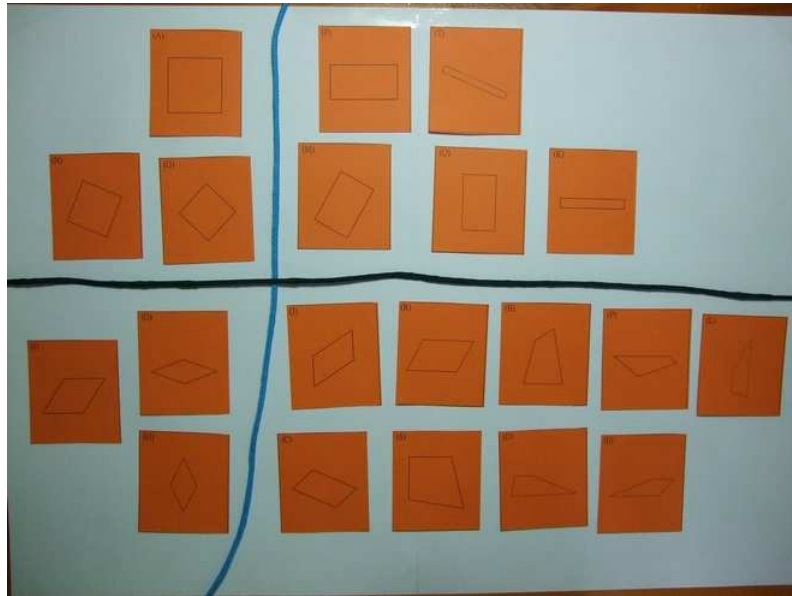


圖 3-102 雙準則分類操作一完成

完成後進行問題討論，探討正方形算不算長方形以及菱形？討論問題內容見圖 3-103，此時教學者可由完成後的分類圖形，以及單準則分類操作時，對於長方形與菱形的命名結論，來幫助學生建立，正方形也是長方形的一種與菱形的一種這個概念，由於學生已經歷單準則的分類操作和命名，在了解脈絡的情況下，接受這個概念並不困難。

討論問題 正方形算不算長方形？算不算菱形？為什麼？

圖 3-103 正方形歸屬的討論問題

第五個分類操作，是雙準則分類操作，同時進行分隔有四個直角的四邊形，與沒四個直角的四邊形，與分隔沒有任何一組平行邊，只有一組平行邊，有兩組平行邊的四邊形。學習單的敘述見

圖 3-104。

分類準則：

①分隔有四個直角的四邊形，與沒四個直角的四邊形。

②分隔沒有任何一組平行邊，只有一組平行邊，有兩組平行邊的四邊形。

請拿出兩種不同顏色的繩子，其中一種顏色一條，另一種顏色兩條；一條繩子的，將有四個直角的四邊形分在繩子的一邊，沒有四個直角的四邊形分在繩子的另一邊。兩條繩子的，將四邊形分成三個區域，一個是沒有任何一組平行邊的四邊形，一個是只有一組平行邊的四邊形，一個是有兩組平行邊的四邊形，兩個規則要同時進行，將你分出來的結果畫在下方：

圖 3-104 雙準則分類操作二

大多數學生完成的分類結果，會有兩個空格，如圖 3-105，此刻教學者可以進入問題的討論，討論問題內容見圖 3-106，要學生思考，為什麼會有兩個框框裡頭沒有圖形？能夠改變繩子的位置，讓兩個沒圖形的框框消失嗎？

部分學生能夠順利調整，使空白的框框消失，教學者可以幫助無法達成的學生，分類的結果，見圖 3-107，全班順利完成後，開始四邊形分類脈絡的教學與討論。

在討論的過程中，教學者的重心，再讓學生由分類的脈絡瞭解到，因為所有的正方形都是平行四邊形，所以很自然的，在沒有任何一組平行邊，只有一組平行邊，這兩個區塊中，都不會出現有四個直角的四邊形，調整成沒有空格的分類完成圖，是介紹四邊形包含關係圖的好教材，此刻的教學討論過程，是幫助學生經驗層次 2 的非形式演繹期很好的機會。

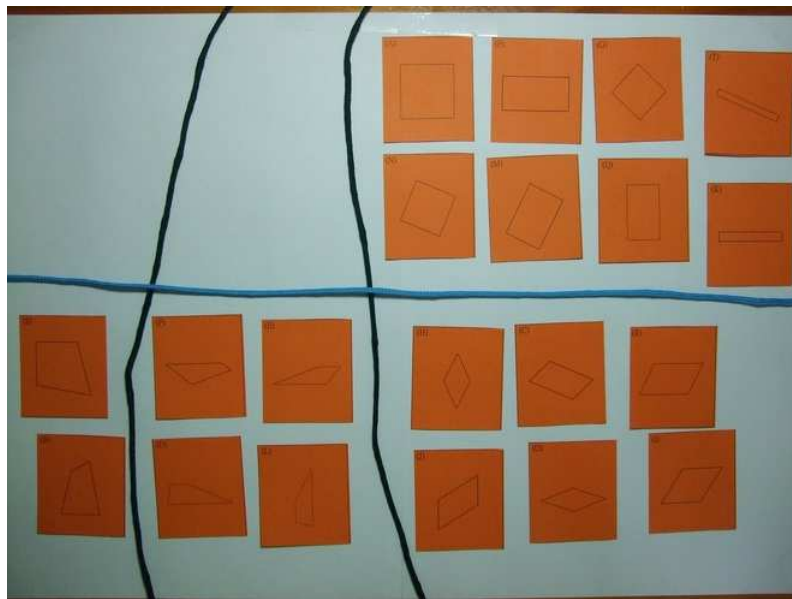


圖 3-105 有空格的雙準則分類操作二完成

討論問題 為什麼會有兩個框框裡頭沒有圖形？能夠改變繩子的位置讓兩個沒圖形的框框消失嗎？

圖 3-106 包含關係圖的討論問題

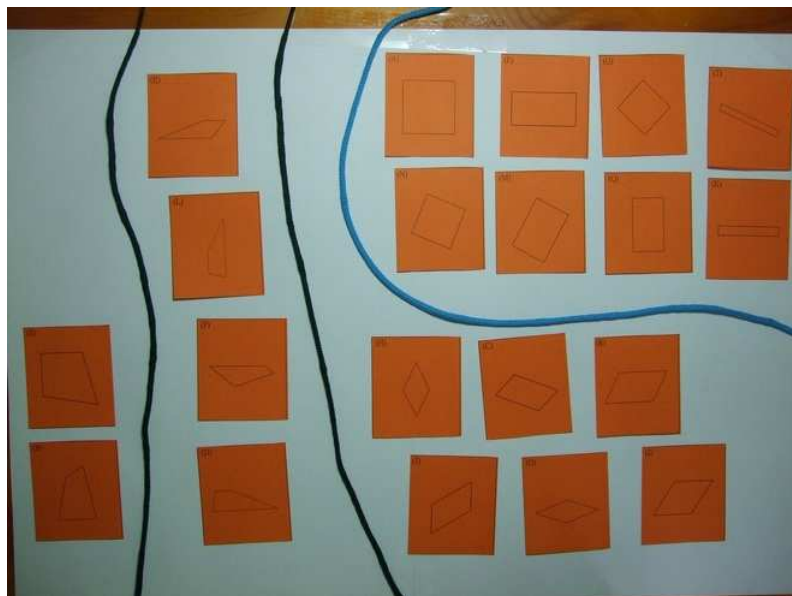


圖 3-107 無空格的雙準則分類操作二完成

第四節 研究流程

本研究實驗與評量流程，各個小組所接受的測驗與實驗，列於表 3-3。

表 3-1 實驗流程表

內容	時間	試驗組	試驗組	實驗組	實驗組	對照組
前測預試	2008.9.5	7A				
前測	2008.10.6		7B	7C	7D	
教學活動試教	2008.11.19	7A	7B			
教學策略實驗	2008.11.20			7C	7D	
後測	2008.11.21			7C	7D	
延後測	2008.11.28			7C	7D	7E

本研究歷時一年又三個月，研究進度甘梯圖，如表 3-4 所示。

表 3-2 本研究進度甘梯圖

西元紀年 月分	2007 2008												2009					
	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	
文獻蒐集、閱讀與整理																		
分類策略成型																		
非典型例性質察覺策略成型																		
提出研究計畫																		
編寫教學活動與實施																		
編寫實驗評量與實施																		
整理資料與撰寫研究報告																		

第肆章 結果與討論

結果與討論共有五個小節，第一小節，是前測評量結果，報導規模為 97 人的前測評量結果。

第二小節，是非典型例性質察覺教學活動實驗，報導研究者進行非典型例性質察覺教學活動實驗的情況，實驗班級是 7C，人數為 34 人。

第三小節，是分類教學活動實驗，報導研究者進行分類教學活動實驗的情況，實驗班級是 7B，人數為 32 人。

第四小節，是後測與延後測評量結果，報導後測與延後測的結果，後測規模為 66 人，分別是察覺組 34 人、分類組 32 人；延後測規模為 100 人，分別是察覺組 34 人、分類組 32 人、對照組 34 人。

第五小節，是兩種策略的應用討論，內容為研究者進行非典型例性質察覺實驗與分類實驗後，於資料整理、教學回饋、沉澱反思後，對此策略的理解與發現，並利用前測、後測、延後測的結果與複本試題，討論比較與分析兩個策略。

第一節 前測評量結果

本節以及第四節，皆為評量結果的報導，在題目的內容中，會附上每個選項的勾選百分比，四捨五入取到個位數，並於正確選項的勾選百分比前，以星號*註記表示，而在分析迷思類型與製作統計圖時，所使用的百分比率是四捨五入取到小數點後一位。

前測評量目的，在於確認實驗學生的四邊形辨識迷思，實施日期是 2008 年 10 月 6 日，受測時間是 40 分鐘，受測人數共有 97 人，其中 7B 班 32 人、7C 班 34 人、7D 班 31 人，以下為每個試題的評量結果，與研究者所分析的迷思類型判斷。

一、圖形定義題

勾選一個最合適的定義於□中，若你認為都不合適，就在「其它」寫下合適的定義。

正方形	<input type="checkbox"/> 有四個直角，而且四個邊等長的四邊形。*62% <input type="checkbox"/> 有四個直角、四個邊等長，而且上下兩邊要擺成水平的四邊形。60% <input type="checkbox"/> 其它：_____。3%
長方形	<input type="checkbox"/> 有四個直角的四邊形，圖形中長跟寬可以相等，也可以不相等。*23% <input type="checkbox"/> 有四個直角的四邊形，圖形中長跟寬不能相等。75% <input type="checkbox"/> 其它：_____。6%
菱形	<input type="checkbox"/> 四個邊等長的四邊形。*58% <input type="checkbox"/> 一條對角線是水平線、另一條對角線是垂直線的四邊形。32% <input type="checkbox"/> 正方形將對角線位置變成水平與垂直。20% <input type="checkbox"/> 其它：_____。8%
梯形	<input type="checkbox"/> 只有兩個邊平行的四邊形。*37% <input type="checkbox"/> 上、下底平行，而且將上、下底位置擺成水平的四邊形。37% <input type="checkbox"/> 上、下底不等長且平行，另外不平行的兩邊必須等長。40% <input type="checkbox"/> 其它：_____。4%
平行四邊形	<input type="checkbox"/> 上、下兩邊平行，左、右兩邊平行，圖形中可以有直角。21% <input type="checkbox"/> 上、下兩邊平行，左、右兩邊平行，圖形中不能有直角。53% <input type="checkbox"/> 上、下兩邊平行，左、右兩邊平行，上下邊長不等於左右邊長。23% <input type="checkbox"/> 有兩組對邊平行，四個邊可以都不是水平線。*18% <input type="checkbox"/> 其它：_____。3%

圖 4-1 前測圖形定義題

首先是第一大題，前測圖形定義題，內容為挑選正方形、長方

形、菱形、梯形、平行四邊形的圖形定義，由上而下研究者將選項稱之為 I-1-1、I-1-2、…、I-5-5。

在正方形定義中，學生主要的回答類型有三種，分別是勾選 I-1-1 (38.1%)、勾選 I-1-2 (36.1%)、同時勾選 I-1-1 與 I-1-2 (22.7%)。

勾選 I-1-2 與同時勾選 I-1-1 與 I-1-2 的學生，對於正方形的概念定義中，存在認為正方形，必須是正正方方的語意迷思類型，以及典型例迷思類型，認為正方形方位必須擺成水平的，存在迷思與概念正確兩者比例見圖 4-2。

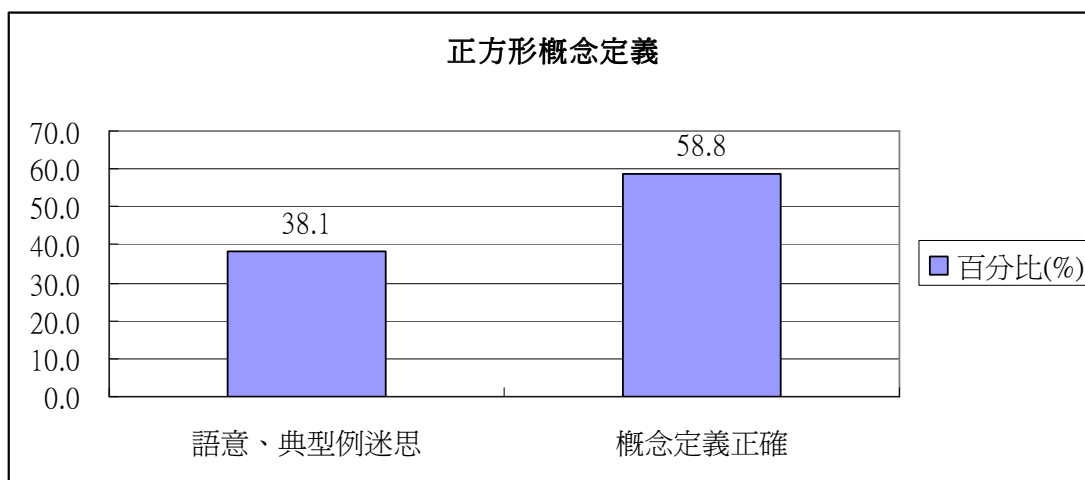


圖 4-2 正方形概念迷思前測結果長條圖

在長方形定義中，學生主要的回答類型有兩種，分別是勾選 I-2-1 (21.6%)、勾選 I-2-2 (71.1%)。

勾選 I-1-2 的學生，所認知的長方形的概念定義，是認為長方形必須長長的，所以長與寬不能相等的語意迷思類型，也可能是典型例迷思，以腦海中長方形的概念心象典型例，方位擺設呈現水平，長與寬也不相等，或者認為長方形本來就規定長、寬是不等長的，存在迷思與概念正確兩者比例見圖 4-2。

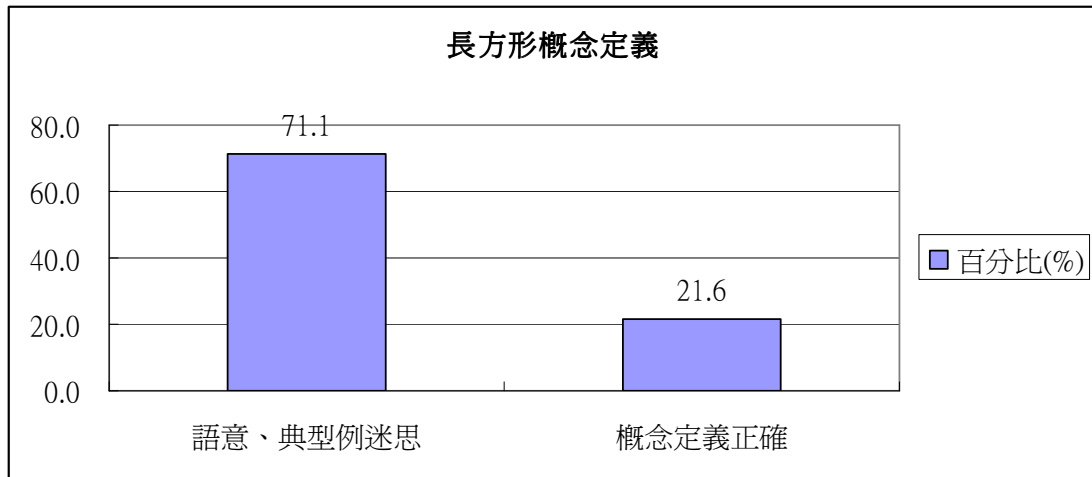


圖 4-3 長方形概念迷思前測結果長條圖

在菱形定義中，學生主要的回答類型有六種，分別是勾選 I-3-1 (38.1%)、勾選 I-3-2 (23.7%)、勾選 I-3-3 (8.2%)、勾選 I-3-4 (8.2%)、勾選 I-3-1 與 I-3-2 (8.2%)、勾選 I-3-1 與 I-3-3 (8.2%)。

後五種的學生，所認知的菱形的概念定義，認為菱形需要擺成立起來的樣子，對角線要一條水平方位，另一條垂直方位，這屬於典型例迷思類型，存在迷思與概念正確兩者比例見圖 4-4。

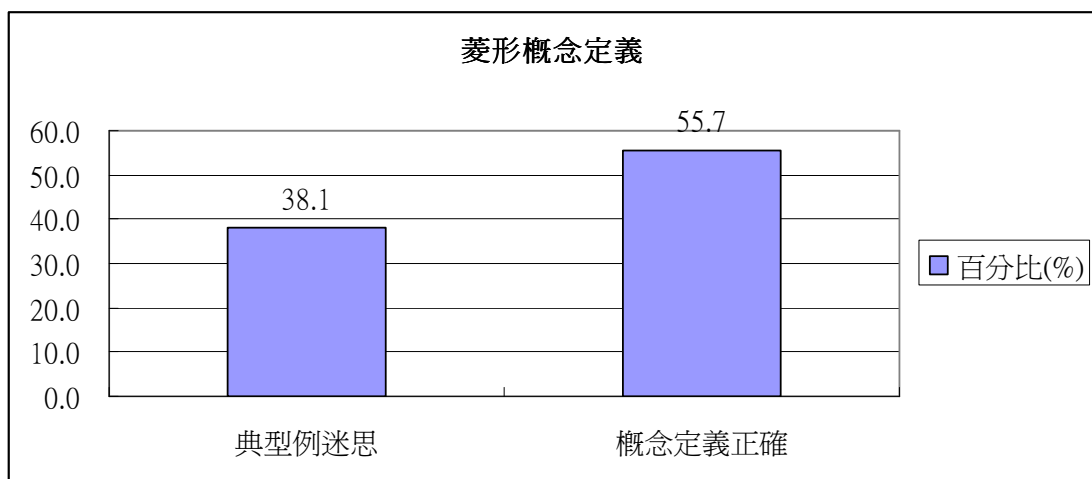


圖 4-4 菱形概念迷思前測結果長條圖

在梯形定義中，學生主要的回答類型有四種，分別是勾選 I-4-1 (20.6%)、勾選 I-4-2 (24.7%)、勾選 I-4-3 (33.0%)、勾選 I-4-1 與 I-4-2 (10.3%)。

後三種答題類型的學生，所認知的梯形的概念定義，是認為梯形的上下底需要是水平線，這屬於典型例迷思類型，存在迷思與概念正確兩者比例見圖 4-5。

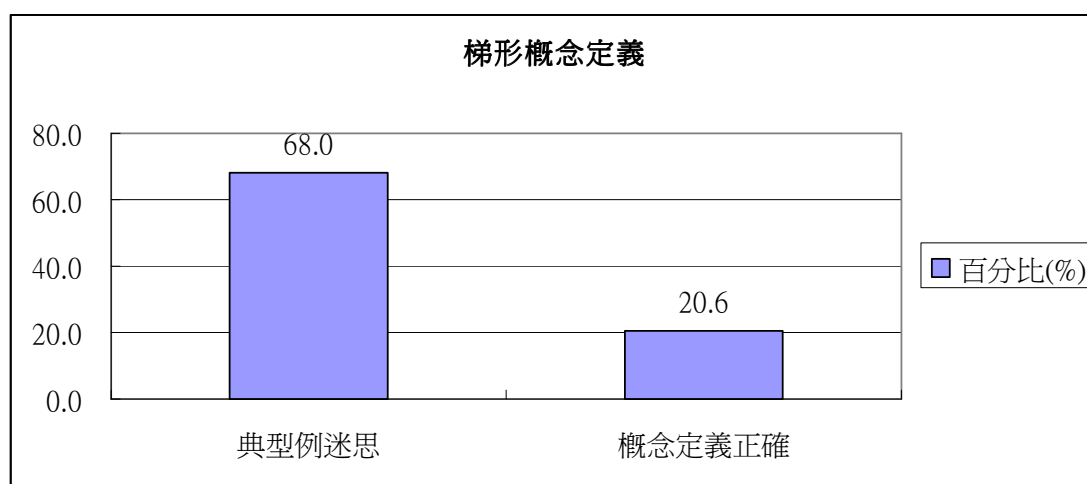


圖 4-5 梯形概念迷思前測結果長條圖

在平行四邊形問題中，學生主要的回答類型有六種，分別是勾選 I-5-1 (17.5%)、勾選 I-5-2 (37.1%)、勾選 I-5-3 (14.4%)、勾選 I-5-4 (7.2%)、勾選 I-5-2 與 I-5-3 (6.2%)、勾選 I-5-2 與 I-5-4 (6.2%) 的學生。

勾選 I-5-4 的學生，其概念定義完全正確，勾選 I-5-1 的學生，有可能會認為平行四邊形需要有兩邊是水平線，但是有關注到，判斷是否為平行四邊形的關鍵，在於兩組對邊是否平行。

所以研究者把這兩種學生，都認定為概念定義正確，另外的四種學生，認為平行四邊形，只能是典型心象所畫的那個樣子，屬於典型例迷思類型，存在迷思與概念正確兩者比例見圖 4-6。

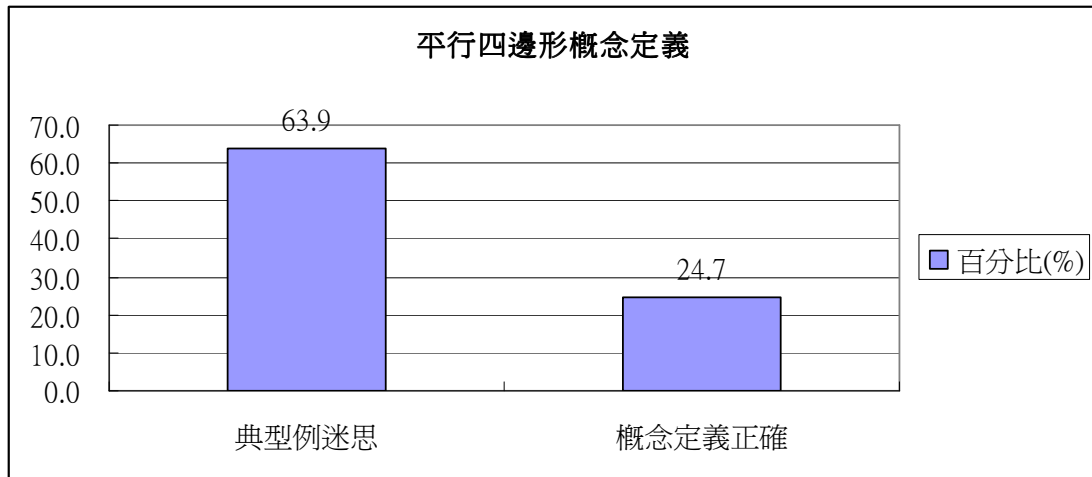


圖 4-6 平行四邊形概念迷思前測結果長條圖

正方形、長方形、菱形、梯形、平行四邊形，這五個圖形的概念定義，回答正確的比例，列於圖 4-7，從這個資料顯示，利用直角個數與等邊個數，來敘述圖形定義的正方形、菱形，對於學生而言是比較沒有困難的。

圖形定義敘述，涉及到對邊平行的梯形與平行四邊形，學生的概念定義，是比較有問題的，當然，長方形也屬於用直角個數來敘述定義的圖形，卻因為學生強烈的語意、典型例迷思影響，造成概念定義上的認知錯誤。

另一方面，學生回答本大題時，判斷來源有兩部份，一部分是對於此圖形名稱，本來就有的概念定義，一部分是根據圖形名稱，產生概念心象，再依據概念心象，作答定義的判斷。

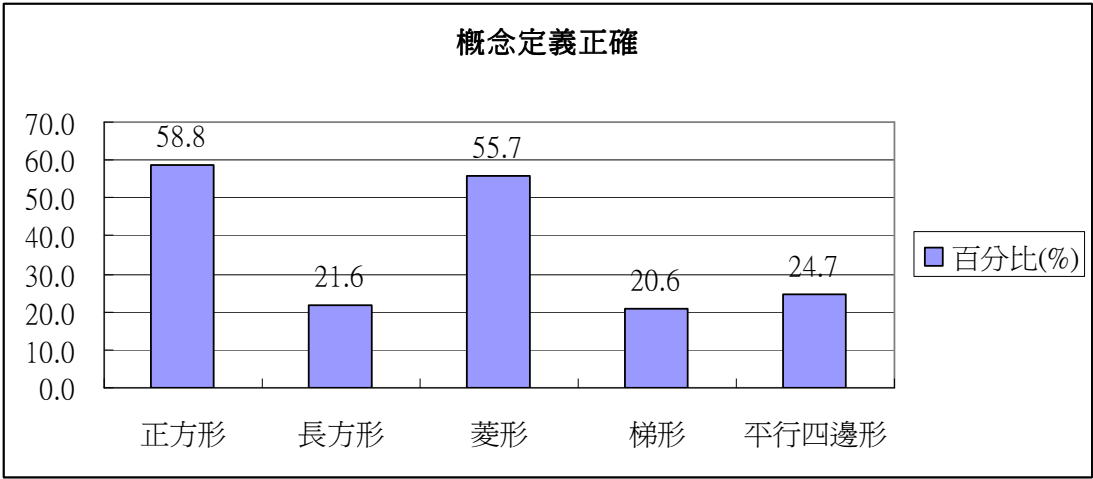


圖 4-7 四邊形概念定義正確長條圖

由於第二大題與第四大題，是相同題目的名稱版本與定義版本，將一起並列來討論，以下把第二大題與第四大題的題目選項，分別稱為Ⅱ-1-A、Ⅱ-1-B、…、Ⅱ-10-D 與Ⅳ-1-A、Ⅳ-1-B、…、Ⅳ-10-D。

Ⅱ-1 與Ⅳ-1 兩題，目的在探測正方形概念心象中，是否屬於辨識上的典型例迷思類型，認為正方形必須是正正方方、水平擺放。

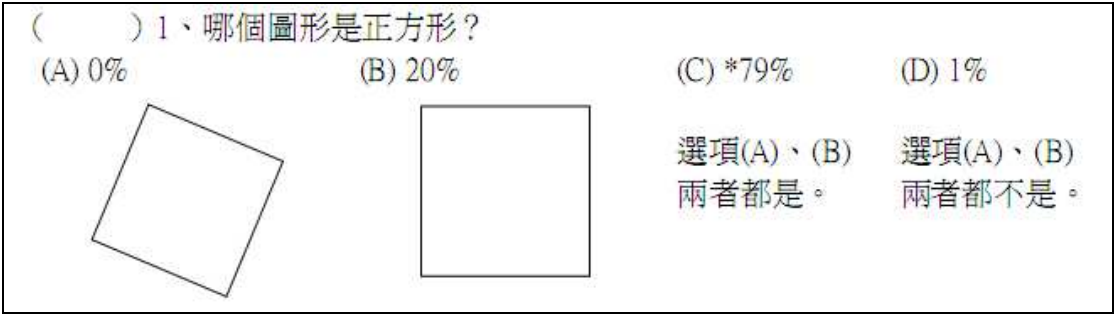


圖 4-8 前測正方形典型例迷思名稱版

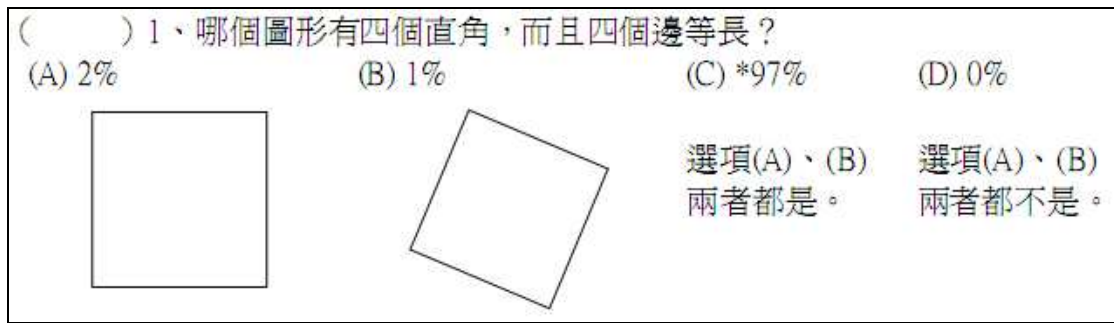


圖 4-9 前測正方形典型例迷思定義版

兩題的主要答題情況為 II-1-B (19.6%)、II-1-C (79.4%)、IV-1-A (2.1%)、IV-1-C (96.9%)，可發現在此題的正方形圖形辨識時，有典型例、語意迷思類型為 19.6%，而在定義版作答時，其中多達 18.6%的學生，能夠依據定義敘述內容，正確辨識正方形，兩者比例列於圖 4-10。

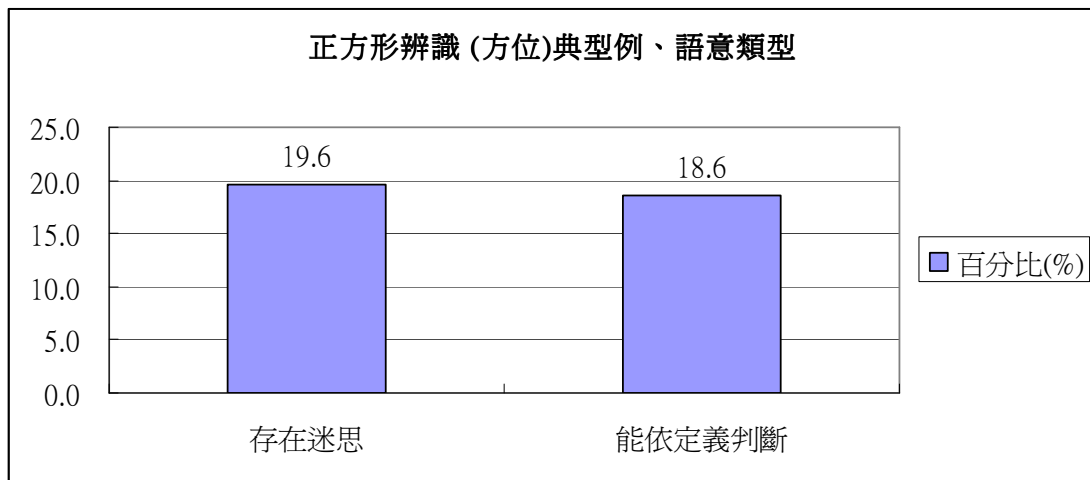


圖 4-10 正方形典型例語意名稱版有迷思而定義版正答長條圖

II-2 與 IV-1 兩題，目的在偵測學生正方形的概念心象，是否存在辨識上空間視覺的迷思類型，將空間中的正方形輪廓投影圖，也認為是平面上的正方形。

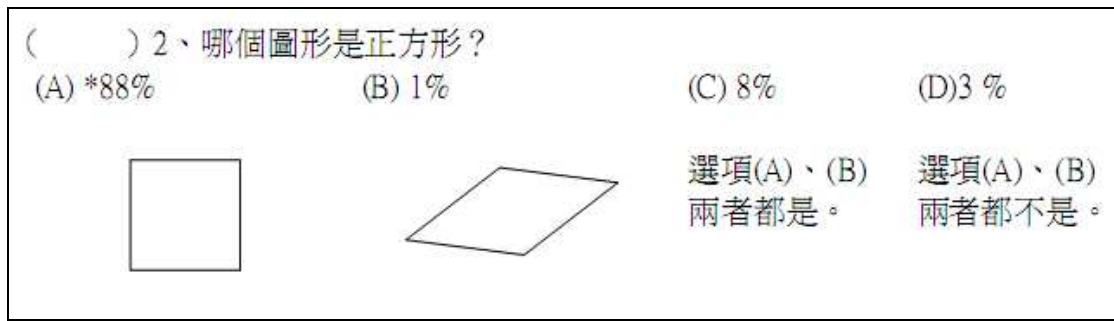


圖 4-11 前測正方形空間視覺迷思名稱版

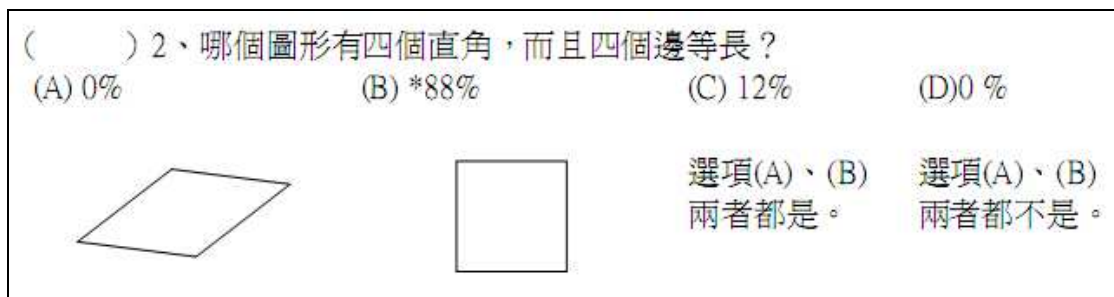


圖 4-12 前測正方形空間視覺迷思定義版

兩題的主要答題情況為 II-2-A (87.6%)、II-2-C (8.2%)、IV-2-B (87.6%)、IV-2-C (12.7%)，可發現在此題的正方形圖形辨識時，有此空間視覺迷思類型為 8.2%，其中 0%，能夠依據定義敘述內容，正確辨識正方形，兩者比例列於圖 4-13。

這個結果顯示，會將空間中的正方形輪廓，認為是平面上正方形的學生，同樣將空間中的直角，認為是平面上的直角。

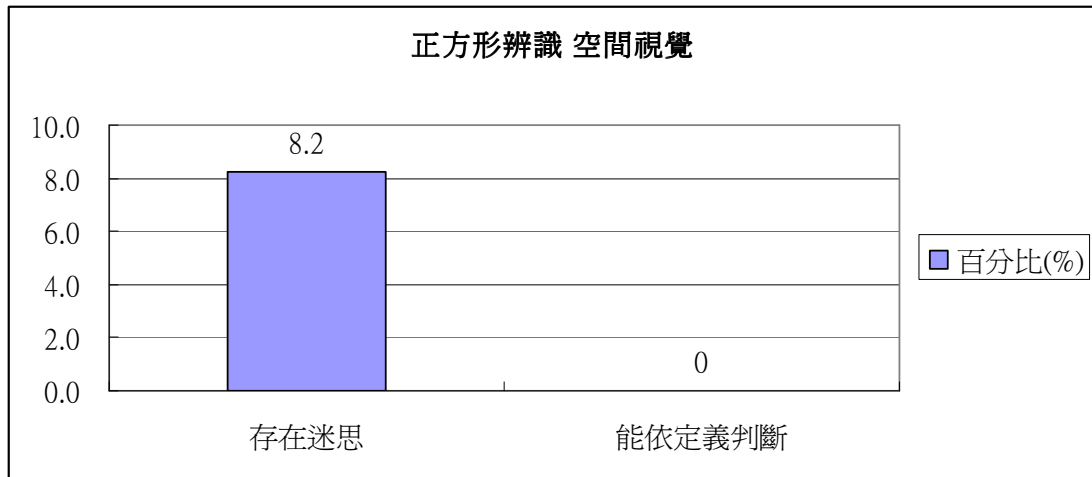


圖 4-13 正方形空間視覺名稱版有迷思而定義版正答長條圖

II-3 與IV-3 兩題，目的在探測學生辨識長方形時，能否接受正方形也是長方形的一種？不能接受的學生，主要的迷思，有典型例迷思類型，受到長方形典型例影響；語意迷思類型，認為長方形要長長的；互斥思維類型，認為一個圖形是正方形，就不能是長方形。

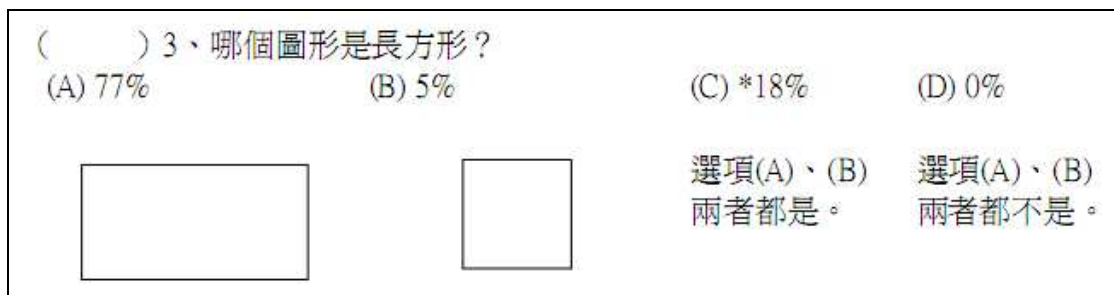




圖 4-14 前測正方形是否為長方形名稱版

() 3、哪個圖形有四個直角？

(A) 1% (B) 1% (C) *98% (D) 0%





選項(A)、(B)
兩者都是。

選項(A)、(B)
兩者都不是。

圖 4-15 前測正方形是否為長方形定義版

兩題的主要答題情況為 II-3-A (77.3%)、II-3-C (17.5%)、IV-3-C (97.9%)，可發現在此題的長方形圖形辨識時，認為正方形不是長方形一種的學生有 77.3%，而在定義版作答時，其中多達 75.3% 的學生，能夠依據定義敘述內容，正確辨識長方形，兩者比例列於圖 4-16。

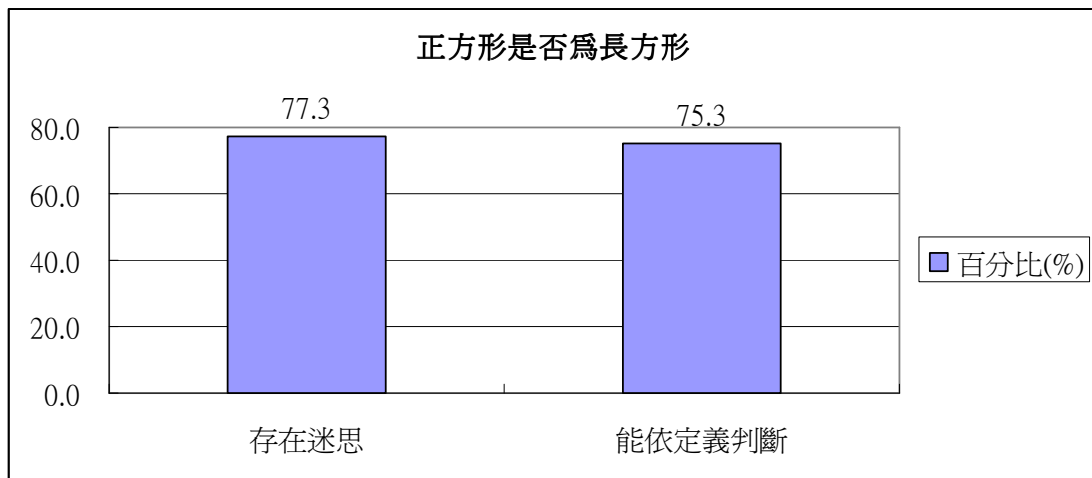


圖 4-16 長方形名稱版有迷思而定義版正答長條圖

II-4 與 IV-4 兩題，目的在探測學生的長方形概念心象，是否存在辨識上的空間視覺迷思類型，將空間中的長方形輪廓，也認為是平面上的長方形。

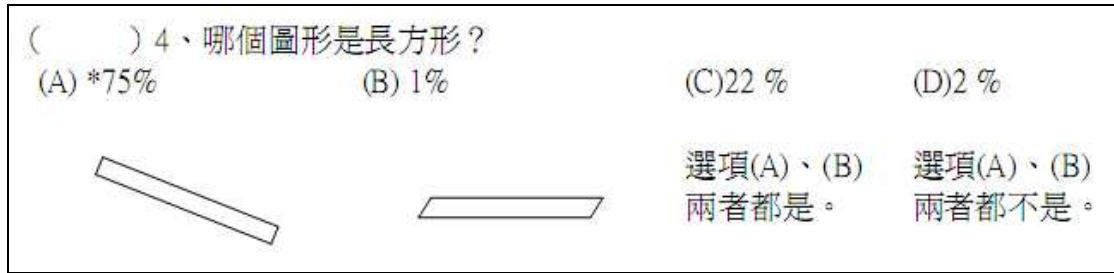


圖 4-17 前測長方形空間視覺迷思名稱版

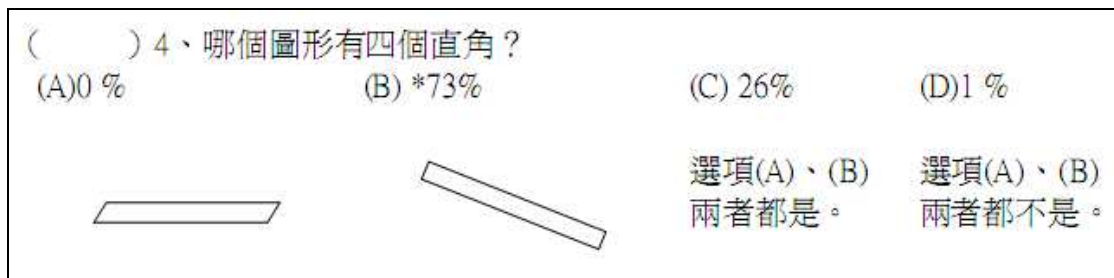


圖 4-18 前測長方形空間視覺迷思定義版

兩題的主要答題情況為 II-4-A (75.3%)、II-4-C (21.6%)、IV-4-B (73.2%)、IV-4-C (25.8%)，可發現在此題的長方形圖形辨識時，有此空間視覺迷思類型為 21.6%，其中 6.2%，能夠依據定義敘述內容，正確辨識正方形，兩者比例列於圖 4-19。

這個結果顯示，會將空間中的長方形輪廓，認為是平面上長方形的學生，多數還是會將空間中的直角，認為是平面上的直角。

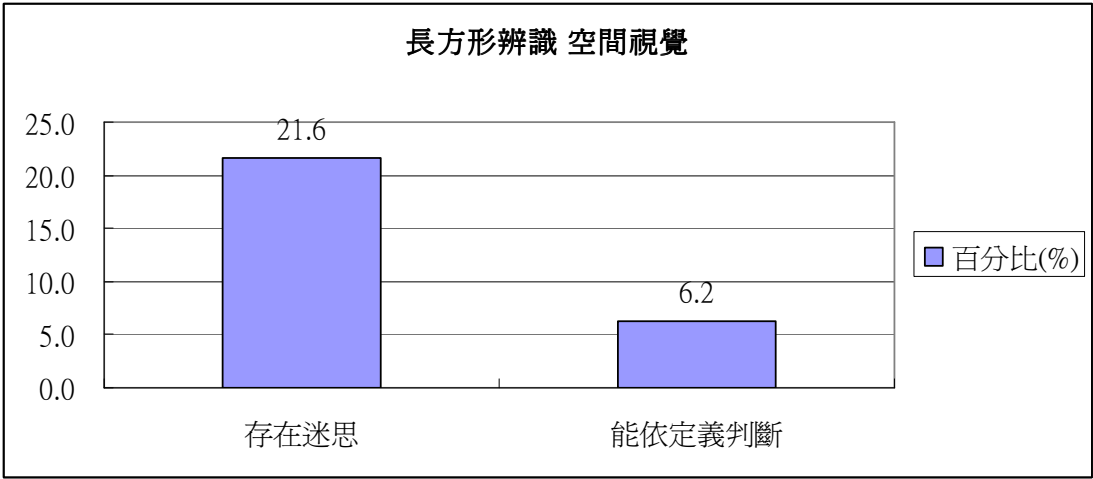


圖 4-19 長方形空間視覺名稱版有迷思而定義版正答長條圖

II-5 與IV-5 兩題，目的在探測學生的菱形概念心象，是否存在典型例迷思類型，認為正方形立起來就是菱形，放平就是正方形。

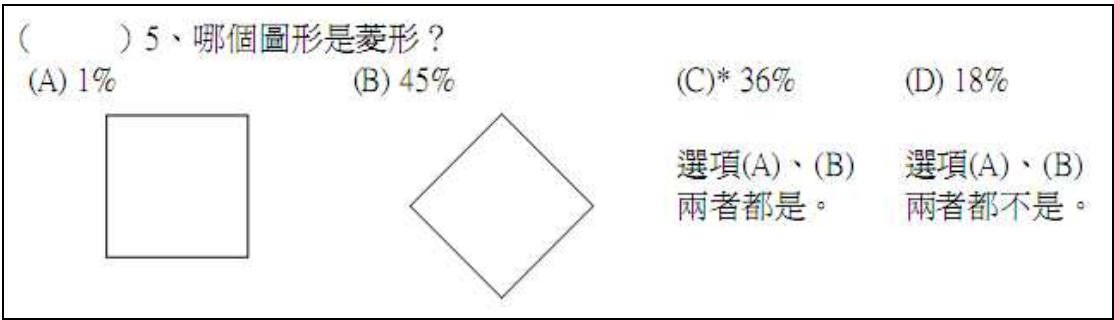


圖 4-20 前測菱形典型例迷思一名稱版

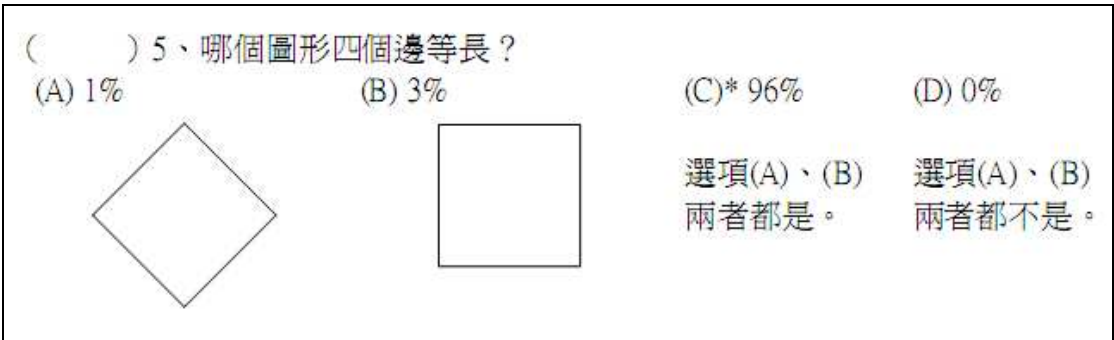


圖 4-21 前測菱形典型例迷思一定義版

兩題的主要答題情況為 II-5-B (45.4%)、II-5-C (36.1%)、IV-5-C (95.9%)，可發現在此題的菱形圖形辨識時，有此典型例迷思類型為 45.4%，其中 41.2%，能夠依據定義敘述內容，正確辨識菱形，兩者比例列於圖 4-22。

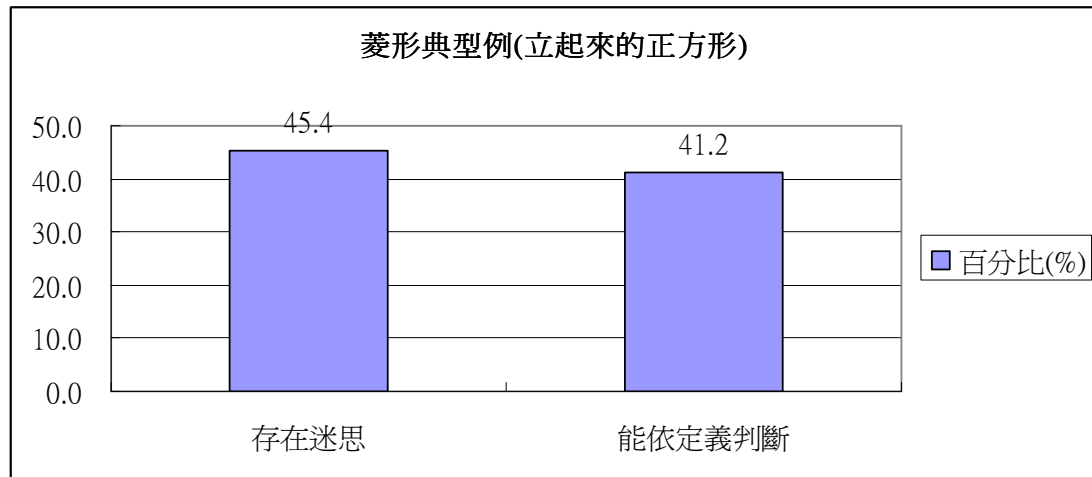


圖 4-22 菱形典型例迷思一名稱版有迷思而定義版正答長條圖

II-6 與 IV-6 兩題，目的在探測學生辨識菱形時，是否存在典型例迷思，認為菱形的擺設方位，對角線必須一條是鉛直線，另一條是水平線。

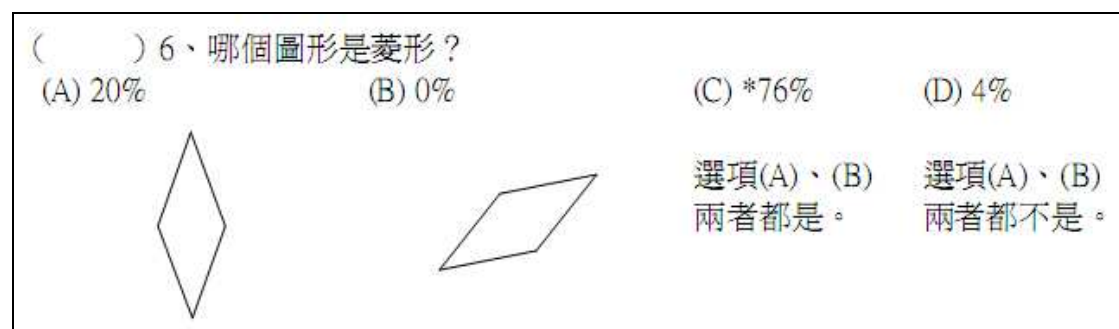


圖 4-23 前測菱形典型例迷思二名稱版

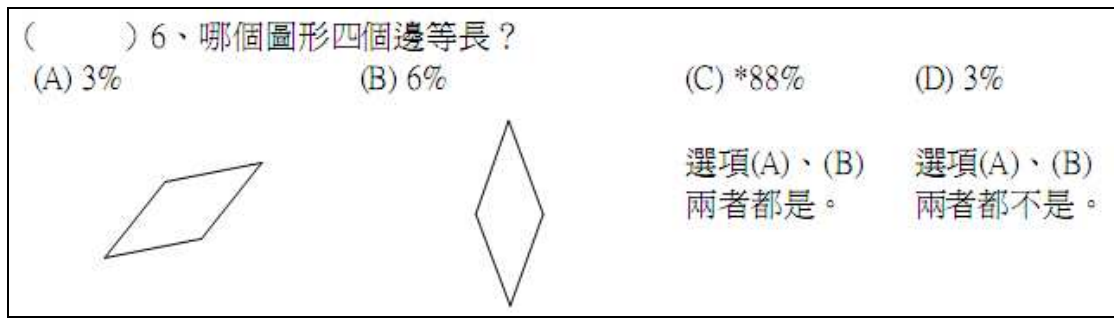


圖 4-24 前測菱形典型例迷思二定義版

兩題的主要答題情況為 II-6-A (19.6%)、II-6-C (76.3%)、IV-6-B (6.2%)、IV-6-C (87.6%)，可發現在此題的菱形圖形辨識時，有此典型例迷思類型為 19.6%，其中 15.5%，能夠依據定義敘述內容，正確辨識菱形，兩者比例列於圖 4-25。

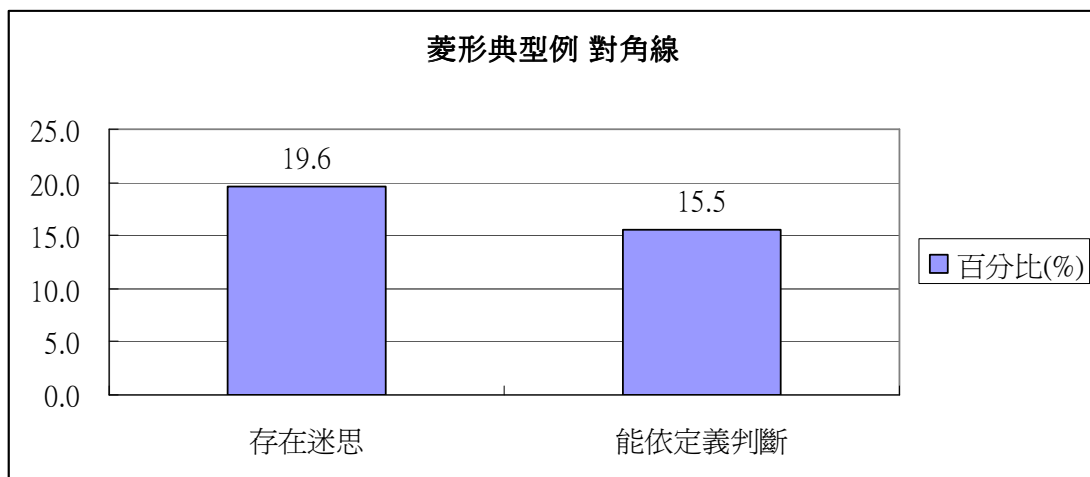


圖 4-25 菱形典型例迷思二名稱版有迷思而定義版正答長條圖

II-7 與 IV-7 兩題，目的在偵測學生的梯形概念心象，是否存在辨識上的典型例迷思類型，認為梯形必須等腰。

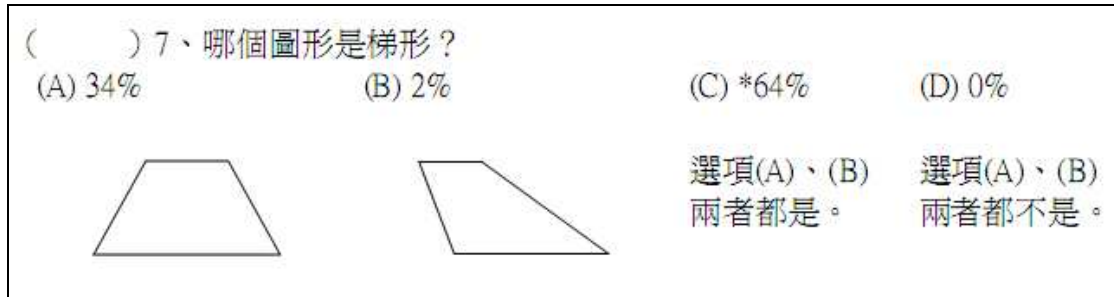


圖 4-26 前測梯形典型例迷思名稱版

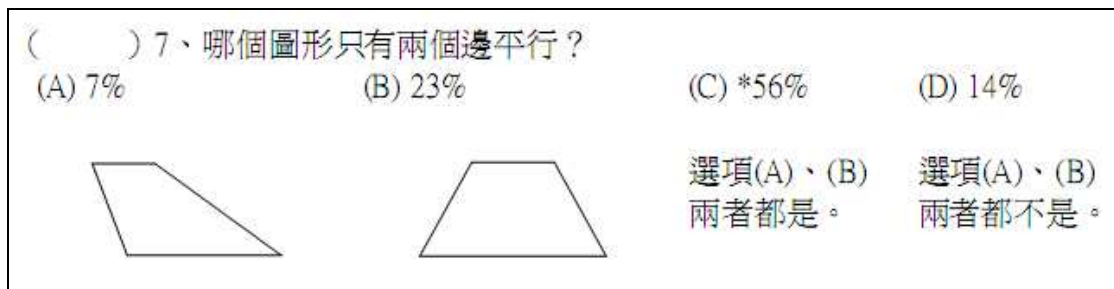


圖 4-27 前測梯形典型例迷思定義版

兩題的主要答題情況為 II-7-A (34.0%)、II-7-C (63.9%)、IV-7-B (22.7%)、IV-7-C (55.7%)，可發現在此題的梯形圖形辨識時，有此典型例迷思類型為 34.0%，其中 8.2%，能夠依據定義敘述內容，正確辨識梯形，兩者比例列於圖 4-28。

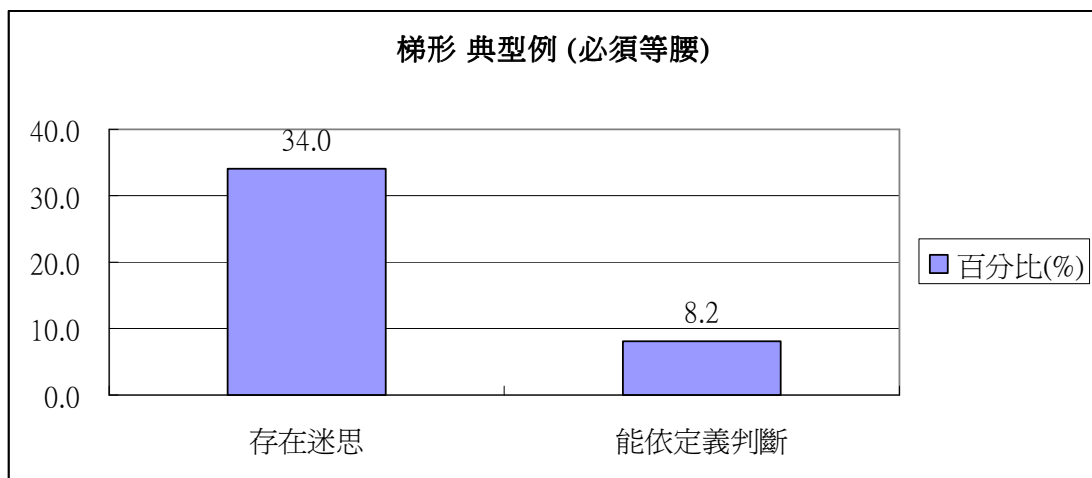


圖 4-28 梯形典型例名稱版有迷思而定義版正答長條圖

還有一個特別的現象是，依據梯形名稱，判斷圖形正確的人數百分比，高於依據梯形定義判斷正確者，列於圖 4-29，這顯示了梯形定義的敘述內容，是較難被學生閱讀理解的，而在正方形、長方形、菱形、平行四邊形都是依據定義判斷正確比例較高。

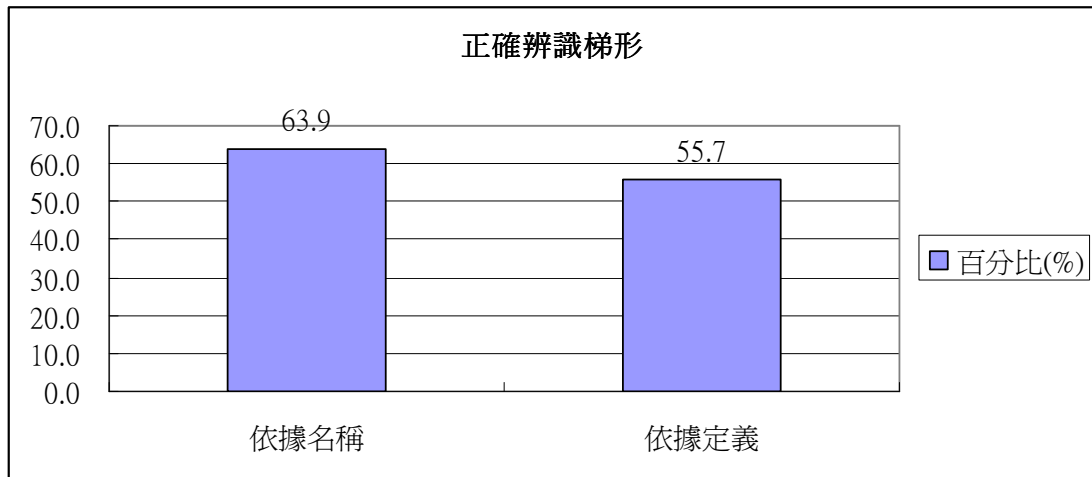


圖 4-29 名稱版與定義版正確辨識梯形長條圖

II-8 與IV-8 兩題，目的在探測學生的互斥思維辨識迷思類型，包含關係的部份，認為正方形不是平行四邊形的一種。

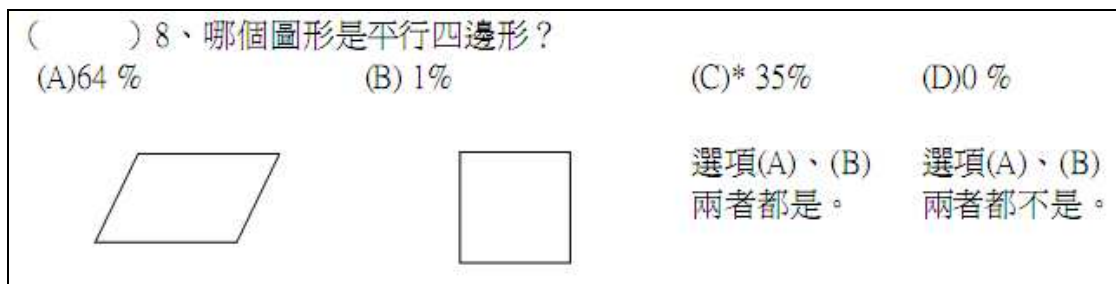


圖 4-30 前測平行四邊形與正方形互斥名稱版

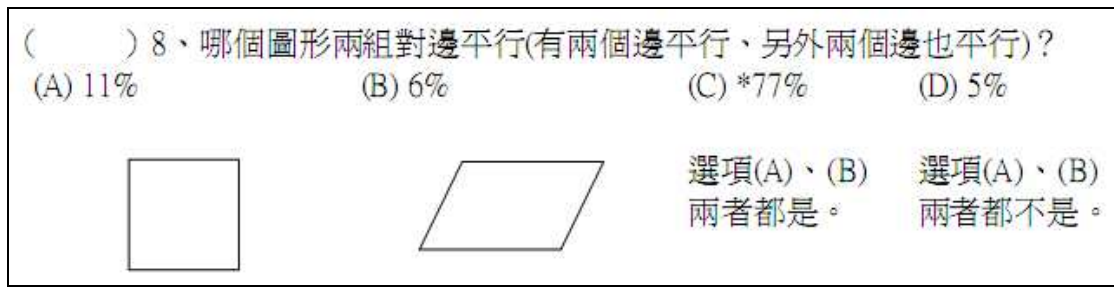


圖 4-31 前測平行四邊形與正方形互斥定義版

兩題的主要答題情況為 II-8-A (63.9%)、II-8-C (35.1%)、IV-8-A (11.3%)、IV-8-C (77.3%)，有此互斥思維辨識迷思類型為 63.9%，其中 47.4%，能夠依據定義正確辨識平行四邊形，兩者比例列於圖 4-32。

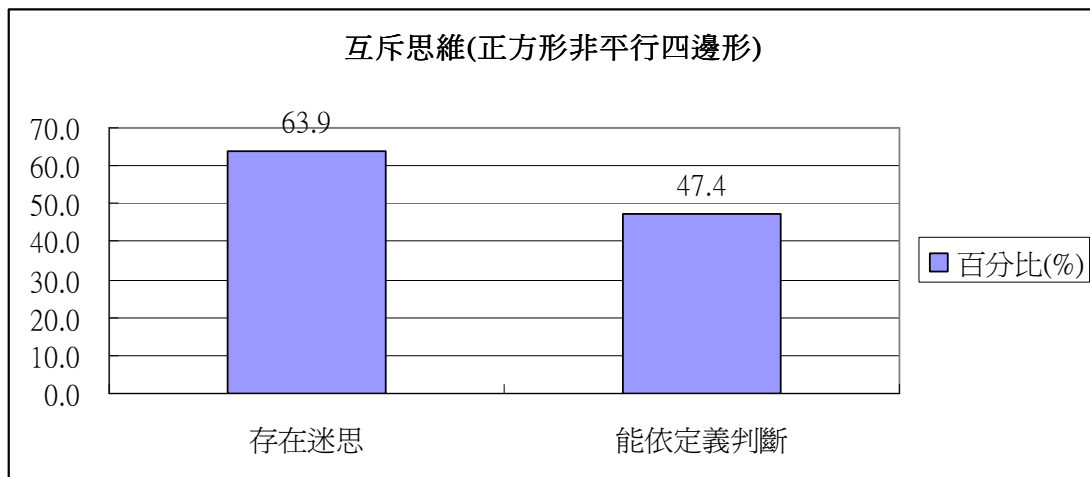




圖 4-32 正方形互斥思維名稱版有迷思而定義版正答長條圖

II-9 與 IV-9 兩題，目的在探測學生的互斥思維辨識迷思類型，包含關係的部份，認為長方形不是平行四邊形的一種。

() 9、哪個圖形是平行四邊形？

(A) 1% (B) 66% (C) *33% (D) 0%






選項(A)、(B)
兩者都是。


選項(A)、(B)
兩者都不是。

圖 4-33 前測平行四邊形與長方形互斥名稱版

() 9、哪個圖形兩組對邊平行(有兩個邊平行、另外兩個邊也平行)？

(A) 4% (B) 11% (C) *82% (D) 2%





選項(A)、(B)
兩者都是。

選項(A)、(B)
兩者都不是。

圖 4-34 前測平行四邊形與長方形互斥定義版

兩題的主要答題情況為 II-9-B (66.0%)、II-9-C (33.0%)、IV-9-B (11.3%)、IV-9-C (82.5%)，有此互斥思維辨識迷思類型為 66.0%，其中 51.5%，能夠依據定義正確辨識平行四邊形，兩者比例列於圖 4-35。

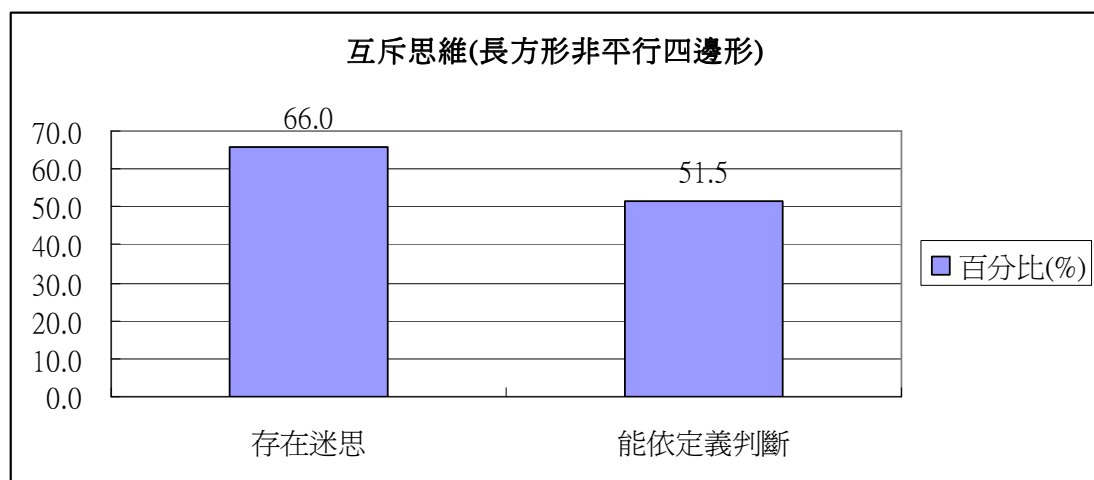




圖 4-35 長方形互斥思維名稱版有迷思而定義版正答長條圖

II-10 與IV-10 兩題，目的在探測學生的互斥思維辨識迷思類型，包含關係的部份，認為菱形不是平行四邊形的一種。

() 10、哪個圖形是平行四邊形？

(A) 47% (B) 1% (C) *49% (D) 2%

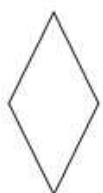

選項(A)、(B)
兩者都是。

選項(A)、(B)
兩者都不是。

圖 4-36 前測平行四邊形與菱形互斥名稱版

() 10、哪個圖形兩組對邊平行(有兩個邊平行、另外兩個邊也平行)？

(A) 7% (B) 14% (C) *71% (D) 7%

選項(A)、(B)
兩者都是。

選項(A)、(B)
兩者都不是。

圖 4-37 前測平行四邊形與菱形互斥定義版

兩題的主要答題情況為 II-10-A (47.4%)、II-10-C (49.5%)、IV-10-B (14.4%)、IV-10-C (71.1%)，有此互斥思維辨識迷思類型為 47.7%，其中 28.9%，能夠依據定義正確辨識平行四邊形，兩者比例列於圖 4-38。

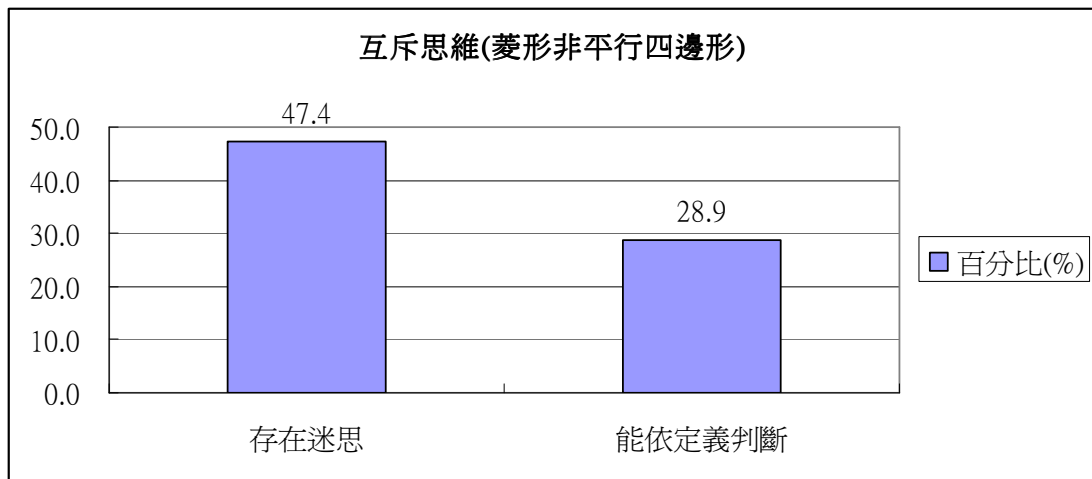


圖 4-38 菱形互斥思維名稱版有迷思而定義版正答長條圖

若將第二與第四大題中，每小題以 1 分計算，得到第二大題的得分是 61.3，第四大題的得分是 82.6，名稱版與定義版分數比較，列於圖 4-39，與預試評量中顯現的趨勢是相同的。

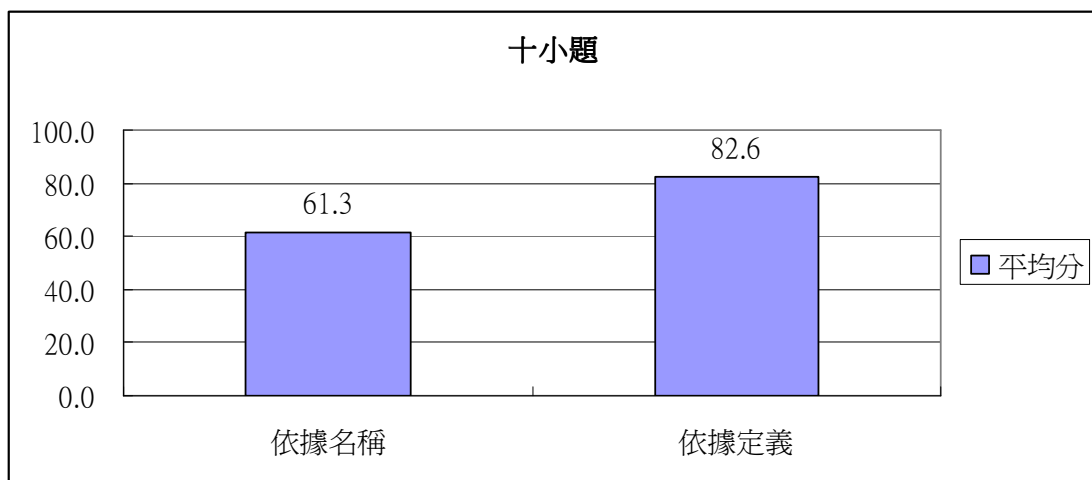


圖 4-39 名稱版與定義版得分比較長條圖

第三大題是為了更進一步檢測學生的互斥思維。




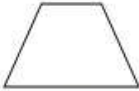

三、圖形判斷是非題	
<p>請就圖一到圖五進行是非判斷，正確打○，錯誤打×，每一題可能不只一個○，也可能只有一個或者沒有，只要你認為是正確的選項，就都打○，錯誤就打×。</p>	<div style="display: flex; align-items: center;">  <div style="margin-left: 10px;"> <p>() 圖一是長方形。*</p> <p>() 圖一是菱形。*</p> <p>() 圖一是平行四邊形。*</p> <p>() 圖一是梯形。</p> </div> </div> <p style="text-align: center;">圖一</p>
<div style="display: flex; align-items: center;">  <div style="margin-left: 10px;"> <p>() 圖二是正方形。</p> <p>() 圖二是菱形。</p> <p>() 圖二是平行四邊形。*</p> <p>() 圖二是梯形。</p> </div> </div> <p style="text-align: center;">圖二</p>	<div style="display: flex; align-items: center;">  <div style="margin-left: 10px;"> <p>() 圖三是正方形。</p> <p>() 圖三是長方形。</p> <p>() 圖三是平行四邊形。*</p> <p>() 圖三是梯形。</p> </div> </div> <p style="text-align: center;">圖三</p>
<div style="display: flex; align-items: center;">  <div style="margin-left: 10px;"> <p>() 圖四是正方形。</p> <p>() 圖四是長方形。</p> <p>() 圖四是菱形。</p> <p>() 圖四是平行四邊形。</p> </div> </div> <p style="text-align: center;">圖四</p>	<div style="display: flex; align-items: center;">  <div style="margin-left: 10px;"> <p>() 圖五是正方形。</p> <p>() 圖五是長方形。</p> <p>() 圖五是菱形。</p> <p>() 圖五是梯形。</p> </div> </div> <p style="text-align: center;">圖五</p>

圖 4-40 前測圖形判斷是非題

圖形是非判斷題，能夠正確判斷包含關係，在正方形、長方形、菱形、梯形、平行四邊形的百分比，分別是 13.4、42.3、62.9、70.1、63.9，列於圖 4-41。

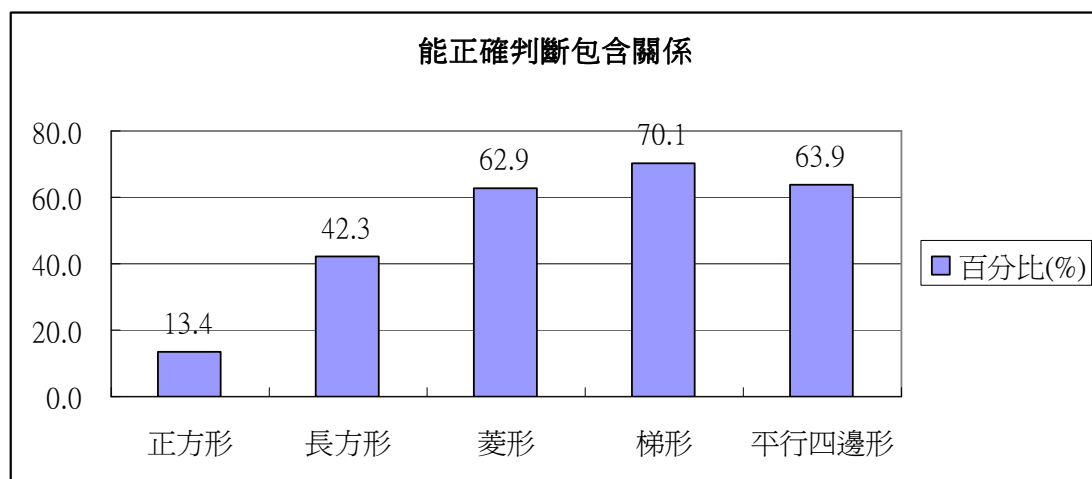


圖 4-41 正確判斷包含關係長條圖

這個結果是很自然的，學生本來就不容易理解到正方形也是長

方形、菱形、平行四邊形，倒過來，也不容易誤會長方形、菱形、平行四邊形會是長方形的一種，逆向（包含於）關係的誤答，大多數來自於互斥思維以外三種辨識迷思類型的影響。

最後來看第五大題，圖形挑選配合題，研究者關心部分的有兩項，一個是在面對難度較高的圖形配合題，多少學生能夠正確無誤的進行判斷？

另一個是，圖形挑選配合題，較容易看出學生是否有互斥思維的迷思，其中有多少學生，會在利用圖形定義進行判斷，也就是定義版的選項作答時，反而是正確答題呢？

五、圖形挑選配合題

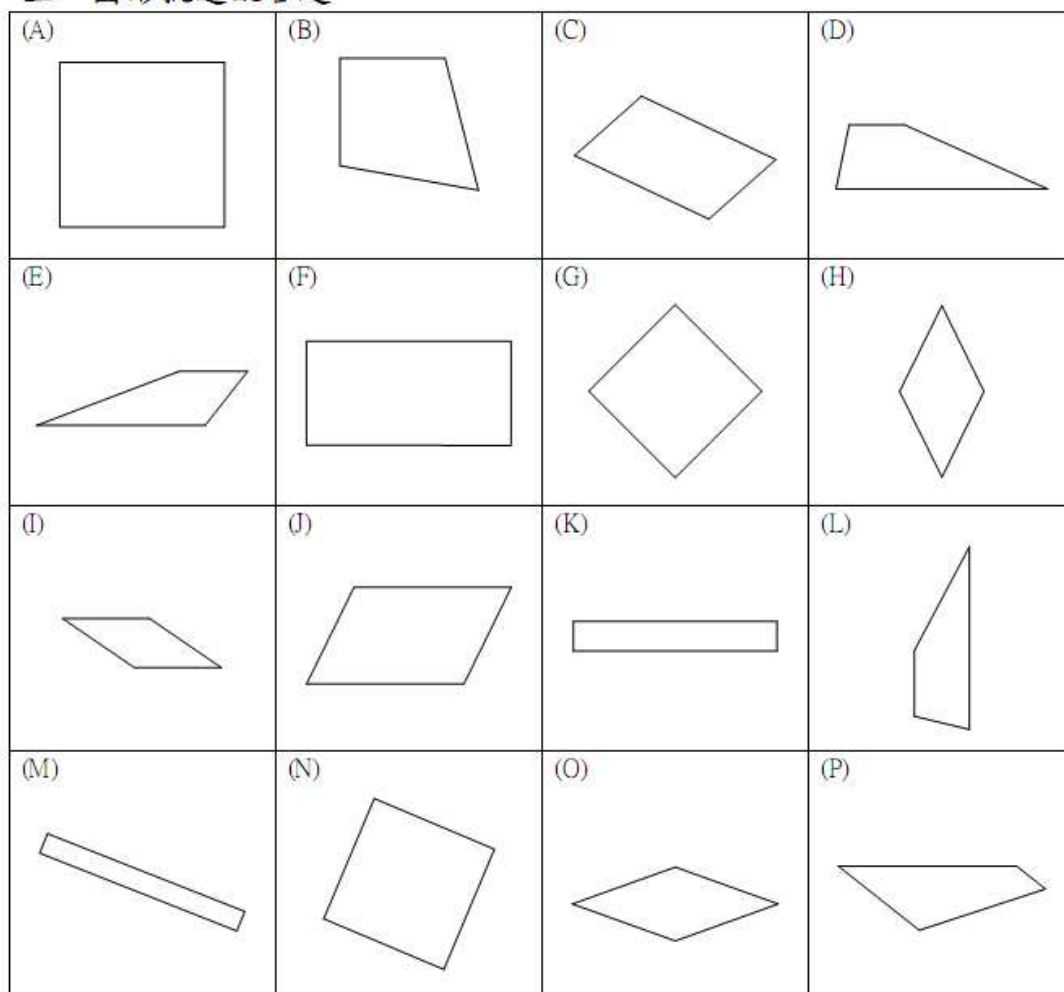


圖 4-42 前測十六個供學生挑選的四邊形

- 請由(A)~(P)這 16 個圖形，回答以下問題，選項可重複使用。
- 1、挑選出全部的正方形：73% *(A)(G)(N)
 - 2、挑選出全部的長方形：14% *(A)(F)(G)(K)(M)(N)
 - 3、挑選出全部的菱形：26% *(A)(G)(H)(I)(N)(O)
 - 4、挑選出全部的梯形：35% *(D)(E)(L)(P)
 - 5、挑選出全部的平行四邊形：23% *(A)(C)(F)(G)(H)(I)(J)(K)(M)(N)(O)
 - 6、挑選出全部有四個直角，而且四個邊等長的圖形：70% *(A)(G)(N)
 - 7、挑選出全部有四個直角的圖形：65% *(A)(F)(G)(K)(M)(N)
 - 8、挑選出全部四個邊等長的圖形：45% *(A)(G)(H)(I)(N)(O)
 - 9、挑選出全部只有兩個邊互相平行的圖形：31% *(D)(E)(L)(P)
 - 10、挑選出全部有兩組對邊平行(有兩個邊平行，另外兩個邊也平行)的圖形：53% *(A)(C)(F)(G)(H)(I)(J)(K)(M)(N)(O)

圖 4-43 前測圖形挑選題

研究者所關心的第一個問題，正方形、長方形、菱形、梯形、平行四邊形，在 V-1 到 V-5 與 V-6 到 V-10 的答對率，以長條圖列於圖 4-44。

另外一個問題，從資料中顯示，有 35.1%的學生，在 V-1 到 V-5 作答時，出現了互斥思維的迷思，但這些學生，在 V-6 到 V-10 答題挑選時，作答結果都是正確的。

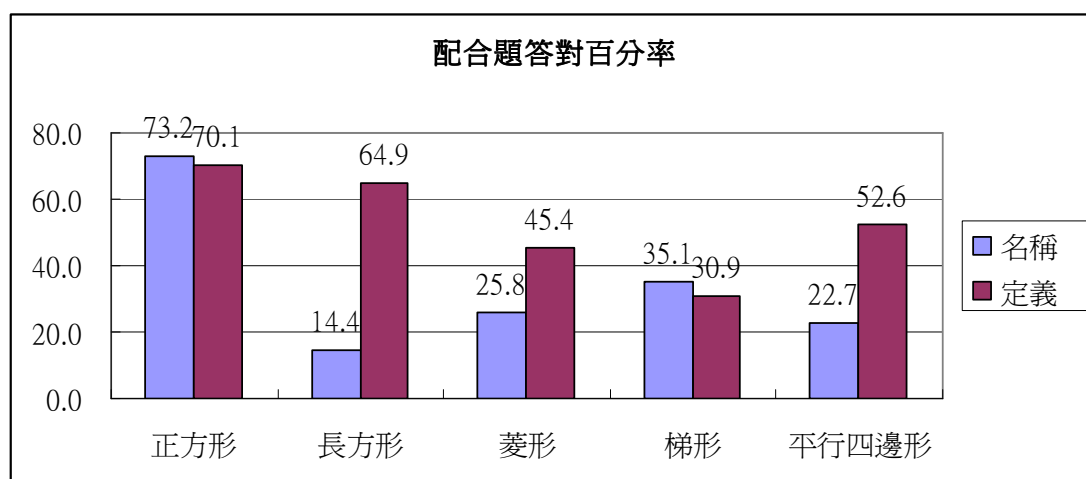


圖 4-44 圖形配合題答對率長條圖

第二節 非典型例性質察覺教學活動實驗

非典型例性質察覺教學活動，實驗的時間是 2008 年 11 月 20 日星期四，研究者服務學校的第二節課（AM 9：15 到 10：00），實驗班級為 7C，學生人數為 34 人，教學活動教學者為研究者本人，亦為此班級的數學課任課教師。

為了降低霍桑效應，過程並無進行錄影，研究者告知學生此教學活動，是小學到國中的補救銜接課程，目的在於讓學生保持平常心，降低突然進行於原本數學課程之外的教學活動，容易出現的錯愕感。

研究者採取兩個方式，來檢視教學實驗的進行成果，第一個是在課堂結束時，收回學生所使用的教學活動學習單，由學習單的填寫內容，來分析學生的學習理解狀況，第二個是在實驗進行時錄音，其後由錄音內容，回憶且反思教學活動進行的內容。

非典型例性質察覺教學活動，是由正方形、長方形、菱形、平行四邊形、梯形五組，每組十個非典型例圖形的特徵觀察紀錄，並在師生討論對話後，總結寫下每一個圖形的定義，教學活動的內容，見圖 4-45 到圖 4-50。

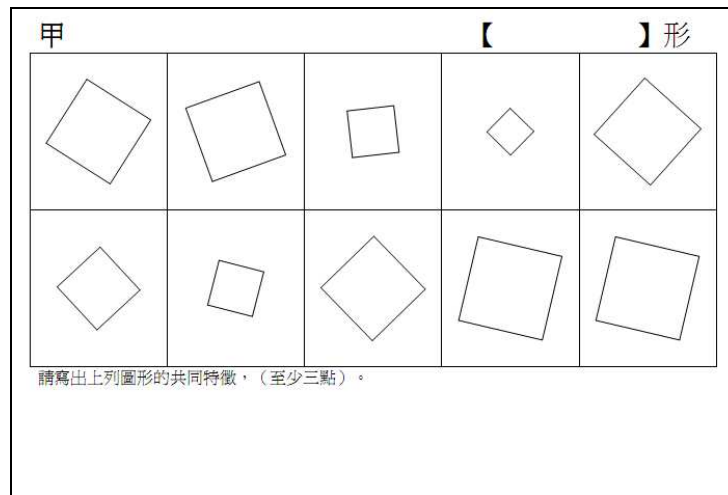


圖 4-45 正方形非典型例性質察覺

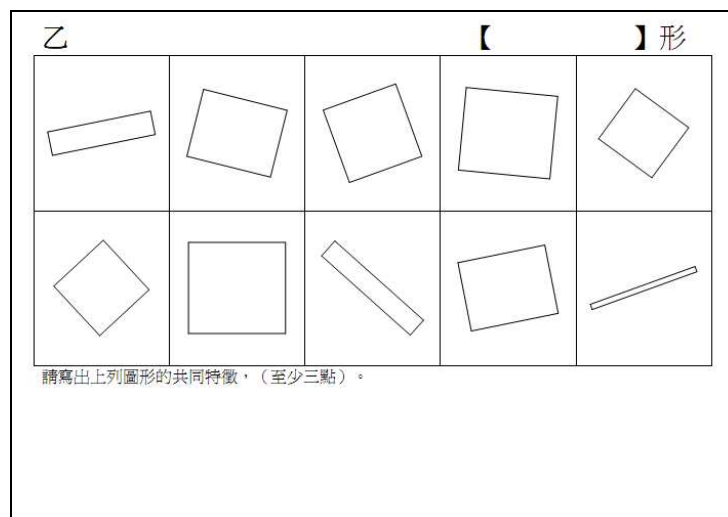


圖 4-46 長方形非典型例性質察覺

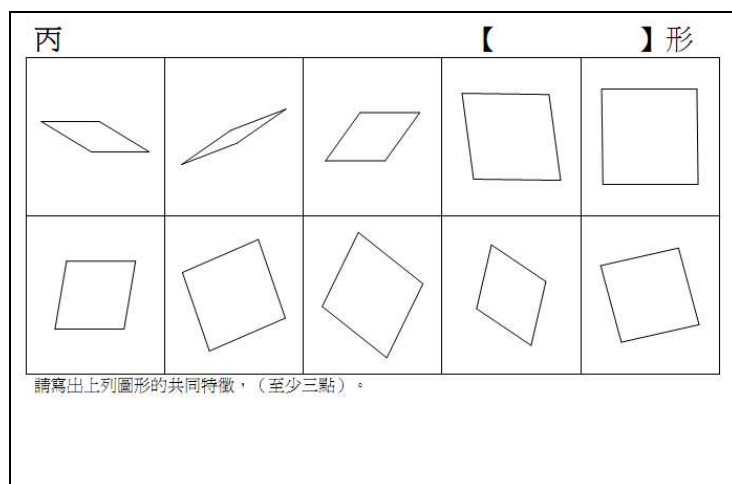


圖 4-47 菱形非典型例性質察覺

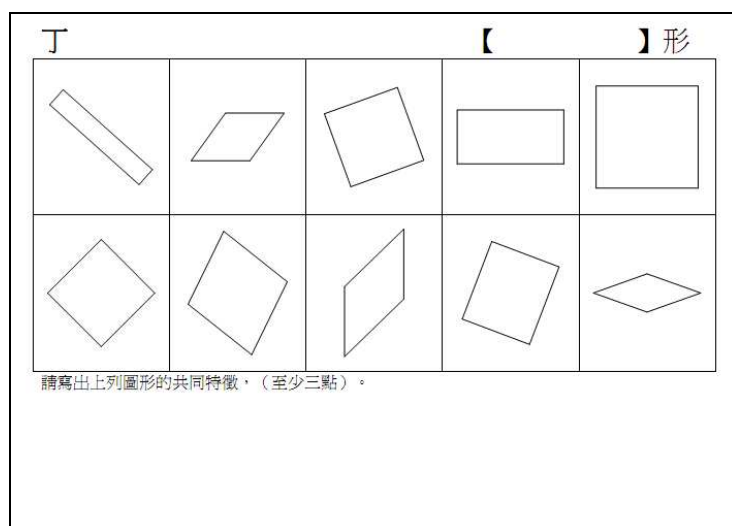


圖 4-48 平行四邊形非典型例性質察覺

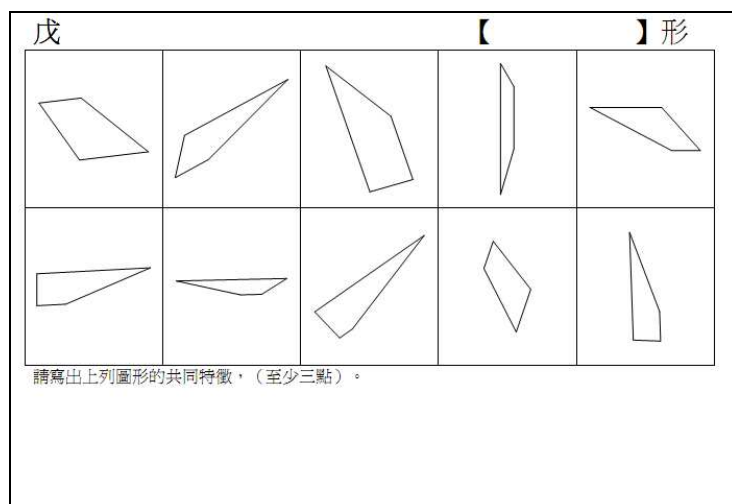


圖 4-49 梯形非典型例性質察覺

心得整理
<p>由 甲 部分的討論，我們得到，【 】形，就是：</p> <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin-top: 5px;"/>
<p>由 乙 部分的討論，我們得到，【 】形，就是：</p> <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin-top: 5px;"/>
<p>由 丙 部分的討論，我們得到，【 】形，就是：</p> <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin-top: 5px;"/>
<p>由 丁 部分的討論，我們得到，【 】形，就是：</p> <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin-top: 5px;"/>
<p>由 戊 部分的討論，我們得到，【 】形，就是：</p> <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin-top: 5px;"/>

圖 4-50 非典型例察覺心得整理

從收回的學習單發現，34 位學生中，有 3 位除了名字以外，其餘完全空白，有 10 位同學，在心得整理的部份空白，或者寫下無效的圖形定義，見圖 4-51，其餘 21 位同學，大多數能夠觀察到非典型例圖形的共同特徵，並且在經過教學討論後，敘述圖形的定義。

由 甲 部分的討論，我們得到，【 正^方 】形，就是：

由 乙 部分的討論，我們得到，【 矩^(長方) 】形，就是：

由 丙 部分的討論，我們得到，【 菱 】形，就是：

由 丁 部分的討論，我們得到，【 平行四邊 】形，就是：

由 戊 部分的討論，我們得到，【 梯 】形，就是：

圖 4-51 無效的圖形定義作答

在一開始的甲部分圖形（正方形），討論節奏比較緩慢，此刻研究者除了介紹學習單中，寫出共同特徵的要求外，還宣告了接下來的討論規則，規則有二，一個是每人自由發表（無人發表時採取教學者點名的方式）所發現的共同特徵，全班同學確認無誤後，換下一位同學發表，直到找不出共同特徵為止。

多數的學生都有注意到，甲部分圖形皆有四個直角與四邊等長，學生多使用多半使用 90° 角的敘述方式，來表示直角，也有不少學生在甲部分圖形，發現了對角線等長及對邊等長的正方形共同特徵，圖 4-52 到圖 4-54，是學生在學習單上，所發現共同特徵的紀錄的例子。

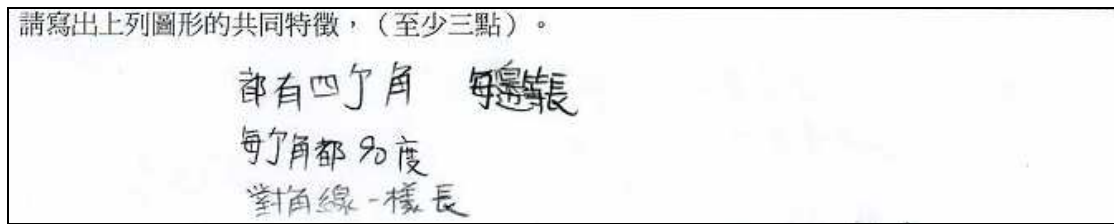


圖 4-52 正方形非典型例察覺特徵例一



圖 4-53 正方形非典型例察覺特徵例二

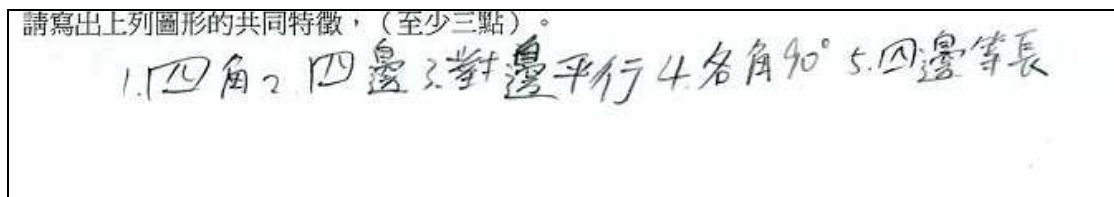


圖 4-54 正方形非典型例察覺特徵例三

到了乙部分圖形的討論（長方形），學生已熟悉規則進入狀況，多數學生都有注意到，乙部分圖形皆有四個直角，圖 4-55 到圖 4-57，是學生在學習單上，所發現共同特徵的紀錄的例子。

此刻由於在討論發表時，有學生提出了對邊這個名詞，所以研究者在這個時候，重新介紹了何謂四邊形的對邊。

第肆章 結果與討論

請寫出上列圖形的共同特徵，（至少三點）。

角都是90度
有四丁角
都有四丁邊
對邊相互平行
都有四丁直角
對邊等長

圖 4-55 長方形非典型例察覺特徵例一

請寫出上列圖形的共同特徵，（至少三點）。

1. 角皆是直角
2. 有兩組對邊
3. 對邊互相平行

圖 4-56 長方形非典型例察覺特徵例二

請寫出上列圖形的共同特徵，（至少三點）。

1. 四個直角
2. 2雙對邊平行
3. 四個邊
4. 四個頂點

圖 4-57 長方形非典型例察覺特徵例三

進行到丙部分圖形的討論（菱形），多數學生都有注意到，丙部分圖形，皆有四個相等的邊，由於在乙部分時，研究者進行了對邊的講授介紹，所以從丙部分開始，學生大多會對圖形的對邊，來進行特徵的觀察，圖 4-58 到圖 4-60，是學生在學習單上，所發現共同特徵的紀錄的例子。

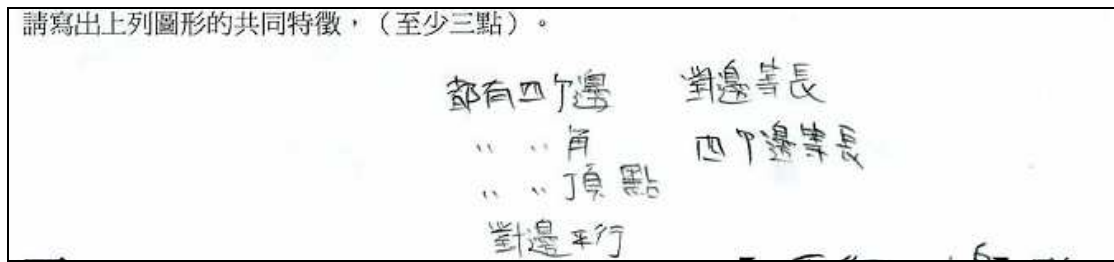


圖 4-58 菱形非典型例察覺特徵例一

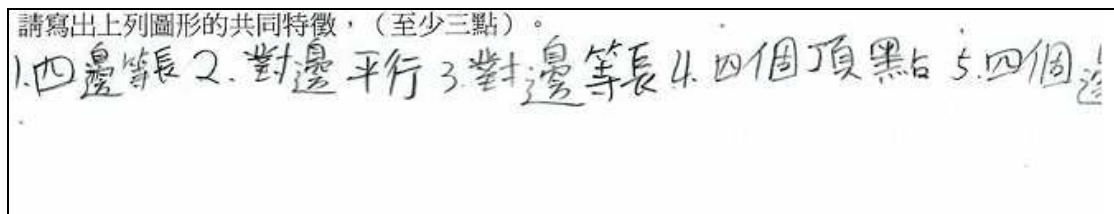


圖 4-59 菱形非典型例察覺特徵例二



圖 4-60 菱形非典型例察覺特徵例三

在丁部分圖形的討論（平行四邊形），剛開始時學生並沒有注意到，丁部分圖形皆為平行四邊形，但有觀察到丁部分圖形的對邊平行，研究者以此為引導的基礎，首先向學生拋問，是否丁部分圖形都有兩組對邊平行？得到學生的肯定回覆。

於是研究者再拋問，若平行四邊形的定義，是有兩組對邊平行的四邊形，那麼丁部分圖形，是否皆為平行四邊形？亦得到學生的肯定回覆。

圖 4-61 到圖 4-63，是學生在學習單上，所發現共同特徵的紀錄的例子。

第肆章 結果與討論

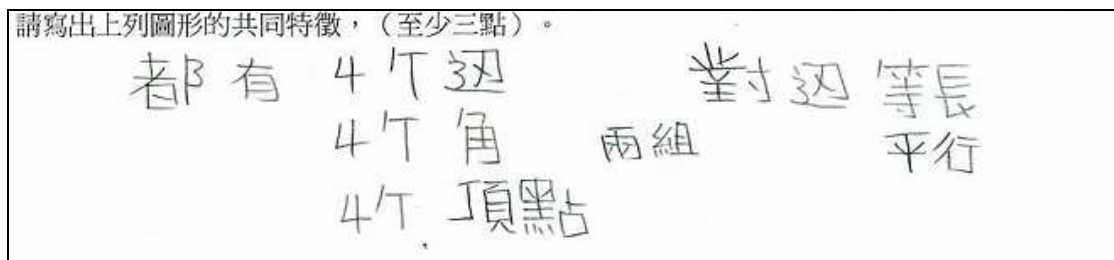


圖 4-61 平行四邊形非典型例察覺特徵例一

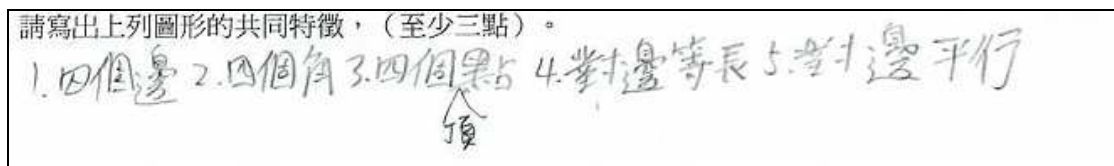


圖 4-62 平行四邊形非典型例察覺特徵例二

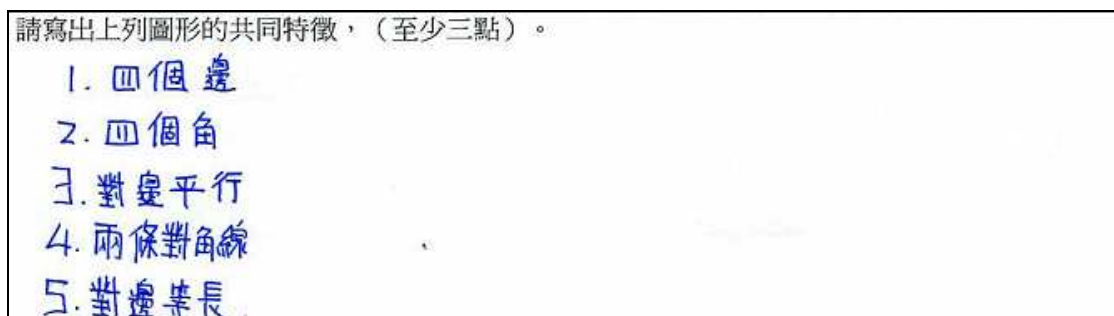


圖 4-63 平行四邊形非典型例察覺特徵例三

第五個性質察覺，戊部分圖形的討論（梯形），學生大多數能夠發現，戊部分圖形只有一組對邊平行，有學生更直接下了結論，認為這些圖形通通都是梯形，圖 4-64 到圖 4-66，是學生在學習單上，所發現共同特徵的紀錄的例子。

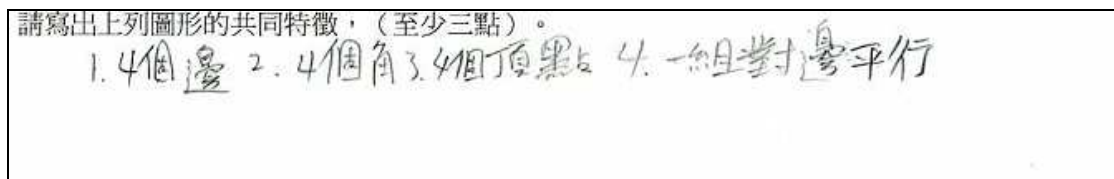


圖 4-64 梯形非典型例察覺特徵例一

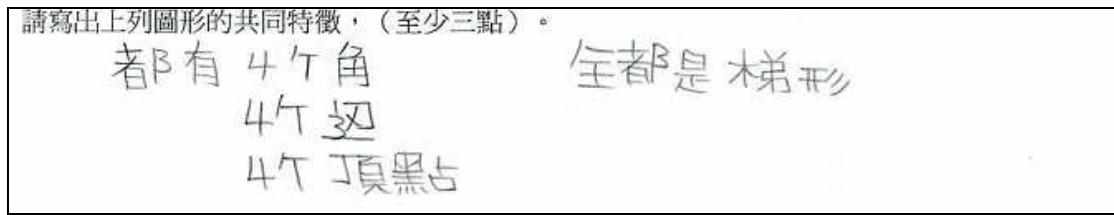


圖 4-65 梯形非典型例察覺特徵例二

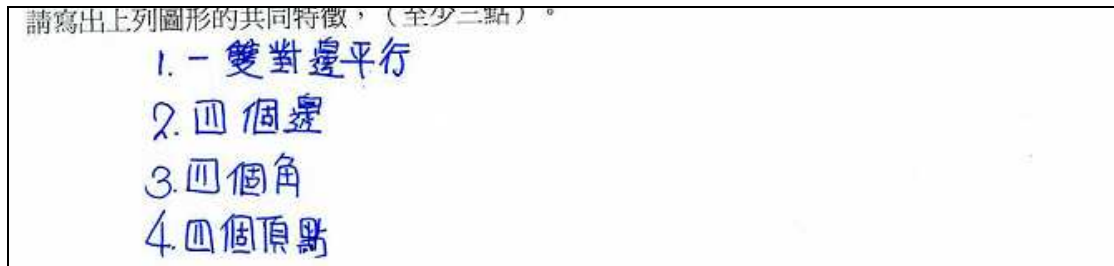


圖 4-66 梯形非典型例察覺特徵例三

在最後心得整理的部份，研究者發現，若學生在甲到戊部分，能夠順利觀察到，這些非典型例圖形的共同特徵，就能夠正確寫出正方形、長方形、菱形、平行四邊形、梯形的定義敘述。

圖 4-67 到圖 4-69，是學生在學習單上，所發現共同特徵的紀錄的例子。

心得整理	
由 甲 部分的討論，我們得到，【 正 方 】形，就是：	四邊等長，每個角都是90度
由 乙 部分的討論，我們得到，【 矩 】形，就是：	四邊等長
由 丙 部分的討論，我們得到，【 菱 】形，就是：	四邊等長
由 丁 部分的討論，我們得到，【 平 形 四 邊 】形，就是：	對邊平行，對邊等長
由 戊 部分的討論，我們得到，【 梯 】形，就是：	只有一組對邊平行

圖 4-67 非典型例察覺心得整理例一

心得整理	
由 甲 部分的討論，我們得到，【 正 方 】形，就是：	1. 四個直角 2. 四個邊等長
由 乙 部分的討論，我們得到，【 長 方 】形，就是：	有四個直角
由 丙 部分的討論，我們得到，【 菱 】形，就是：	四邊等長
由 丁 部分的討論，我們得到，【 平行四邊 】形，就是：	兩組對邊平行 等長
由 戊 部分的討論，我們得到，【 梯 】形，就是：	有一組對邊平行

圖 4-68 非典型例察覺心得整理例二

心得整理	
由 甲 部分的討論，我們得到，【 正 方 】形，就是：	1. 4個直角 2. 4個邊等長 3. 互相平行 4. 互相垂直
由 乙 部分的討論，我們得到，【 長 方 】形，就是：	1. 4個直角 2. 4個邊 3. 4個頂點
由 丙 部分的討論，我們得到，【 菱 】形，就是：	1. 4個角 2. 4個邊平行 3. 對邊平行
由 丁 部分的討論，我們得到，【 平行四邊 】形，就是：	1. 4個邊 2. 4個角 3. 對邊平行 5. 對邊等長
由 戊 部分的討論，我們得到，【 梯 】形，就是：	1. 一雙對邊平行 2. 四個角 3. 四個邊 4. 四個頂點

圖 4-69 非典型例察覺心得整理例三

第三節 分類教學活動實驗

分類教學活動，實驗的時間是 2008 年 11 月 20 日星期四，研究者服務學校的第三節課（AM 10：10 到 10：55），實驗班級為 7B，學生人數為 32 人，教學活動教學者為研究者本人，亦為此班級的數學課任課教師。

為了降低霍桑效應，過程並無進行錄影，研究者告知學生此教學活動，是小學到國中的補救銜接課程，目的在於讓學生保持平常心，降低突然進行於原本數學課程之外的教學活動，容易出現的錯愕感。

研究者採取兩個方式，來檢視教學實驗的進行成果，第一個是在課堂結束時，收回學生所使用的教學活動學習單，由學習單的填寫內容，來分析學生的學習理解狀況，第二個是在實驗進行時錄音，其後由錄音內容，回憶且反思教學活動進行的內容。

分類教學活動是利用二十個四邊形圖卡與兩種顏色的繩子，來進行三個單準則分類，以及兩個雙準則分類操作，並將分類結果記錄於學習單，之後參與命名與問題討論，教學活動的內容，見圖 4-70 到圖 4-80。

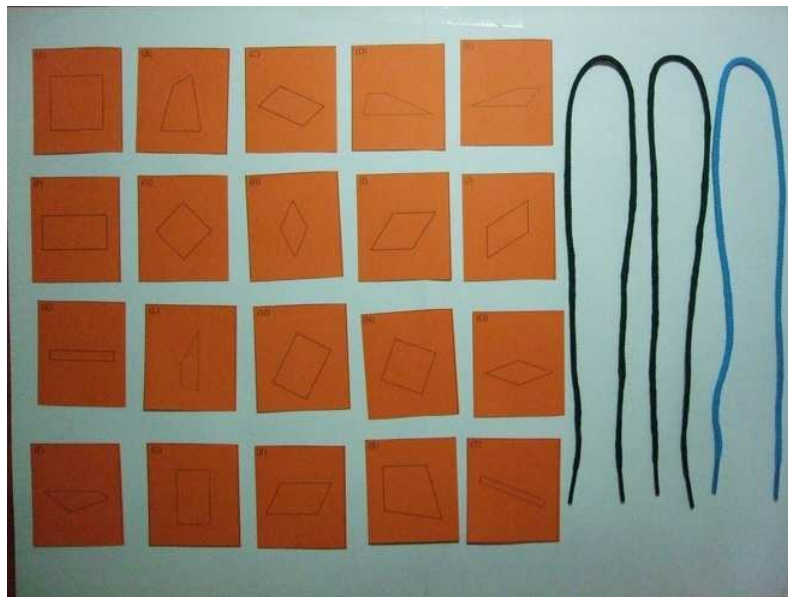


圖 4-70 分類圖卡與繩子

分類準則：四邊形有沒有四個直角？

請拿出一條繩子，將有四個直角的四邊形分在繩子的一邊，沒有四個直角的四邊形分在繩子的另一邊，並將你分出來的結果畫在下方：

圖 4-71 分類準則有沒有四個直角

你覺得有四個直角的四邊形可以叫做【 】，
沒有四個直角的四邊形可以叫做【 】。

圖 4-72 有無四個直角的四邊形命名

分類準則：四邊形有沒有四個相等的邊？

請拿出一條繩子，將有四個相等的邊的四邊形分在繩子的一邊，沒有到四個相等的邊的四邊形分在繩子的另一邊，並將你分出來的結果畫在下方：

圖 4-73 分類準則有沒有四個等邊

第肆章 結果與討論

你覺得有四個相等的邊的四邊形可以叫做【 】,
沒有四個相等的邊的四邊形可以叫做【 】。

圖 4-74 有無四個等邊的四邊形命名

分類準則：四邊形有幾組平行邊？

請拿出兩條繩子，將四邊形分成三個區域，一個是沒有任何一組平行邊的四邊形，一個是只有一組平行邊的四邊形，一個是有兩組平行邊的四邊形，並將你分出來的結果畫在下方：

圖 4-75 分類準則有幾組平行邊

你覺得恰有一組平行邊的四邊形可以叫做【 】,
有兩組平行邊的四邊形可以叫做【 】。

圖 4-76 有幾組平行邊的四邊形命名

分類準則：

①分隔有四個直角的四邊形，與沒四個直角的四邊形。

②分隔有四個相等的邊的四邊形，與沒四個相等的邊的四邊形。

請拿出不同顏色的兩條繩子，其中一條繩子，將有四個直角的四邊形分在繩子的一邊，沒有四個直角的四邊形分在繩子的另一邊。另外一條繩子，將有四個相等的邊的四邊形分在繩子的一邊，沒有到四個相等的邊的四邊形分在繩子的另一邊，兩個規則要同時進行，將你分出來的結果畫在下方：

圖 4-77 雙準則分類操作一

討論問題 正方形算不算長方形？算不算菱形？為什麼？

圖 4-78 正方形歸屬的討論問題

分類準則：
 ①分隔有四個直角的四邊形，與沒四個直角的四邊形。
 ②分隔沒有任何一組平行邊，只有一組平行邊，有兩組平行邊的四邊形。
 請拿出兩種不同顏色的繩子，其中一種顏色一條，另一種顏色兩條；一條繩子的，將有四個直角的四邊形分在繩子的一邊，沒有四個直角的四邊形分在繩子的另一邊。兩條繩子的，將四邊形分成三個區域，一個是沒有任何一組平行邊的四邊形，一個是只有一組平行邊的四邊形，一個是有兩組平行邊的四邊形，兩個規則要同時進行，將你分出來的結果畫在下方：

圖 4-79 雙準則分類操作二

討論問題 為什麼會有兩個框框裡頭沒有圖形？能夠改變繩子的位置讓兩個沒圖形的框框消失嗎？

圖 4-80 包含關係圖的討論問題

一開始進行的，是單準則分類操作 1，四邊形有沒有四個直角，研究者介紹如何使用繩子，將四邊形圖卡進行分類，並且要學生於學習單中，紀錄分類的結果。

由於這並不是學生所熟悉的上課方式，約有接近一半的學生，無法理解如何分類以及紀錄，此時研究者所採用的方法，是直接於課堂間巡視，若學生無法理解規則，就實際操作一兩個圖卡分類給學生看，學生在看過之後，都能夠理解何謂分類，當然，亦有部分學生很快的就理解規則，並且迅速的進行操作。

學生進行分類的速度有快有慢，研究者在大約五六個學生已經分好之後，便點名其中兩位，到講台在黑板寫下分類的結果，另一方面向全班同學說明，如果分類完成後，可以檢查黑板上紀錄的，和你自己分得結果一不一樣？不一樣的話，是你分得出錯還是黑板上出錯？

全班同學幾乎都能夠完成分類操作 1，並且紀錄正確的分類結果，學習單的紀錄內容，研究者羅列了一些例子，於圖 4-81 到圖

4-83。

分類準則：四邊形有沒有四個直角？

請拿出一條繩子，將有四個直角的四邊形分在繩子的一邊，沒有四個直角的四邊形分在繩子的另一邊，並將你分出來的結果畫在下方：

有：F. M. T. A. Q. K. G. N.

沒有：L. S. P. E. R. B. D. I. J. C. H. O.

圖 4-81 有無四個直角的分類紀錄例一

分類準則：四邊形有沒有四個直角？

請拿出一條繩子，將有四個直角的四邊形分在繩子的一邊，沒有四個直角的四邊形分在繩子的另一邊，並將你分出來的結果畫在下方：

有四個直角	沒有四個直角
Q	L
T	P
F	C
M	I
K	D
A	B
G	S
N	H
	R
	J
	E
	O

圖 4-82 有無四個直角的分類紀錄例二

分類準則：四邊形有沒有四個直角？

請拿出一條繩子，將有四個直角的四邊形分在繩子的一邊，沒有四個直角的四邊形分在繩子的另一邊，並將你分出來的結果畫在下方：

有四個直角	沒有四個直角
(B)	(A)
(C)	(Q)
(D)	(K)
(R)	(F)
(S)	(T)
(L)	(M)
(O)	(N)
(P)	(G)
(H)	

非矩形

圖 4-83 有無四個直角的分類紀錄例三

分類完成後，就進入命名的討論，這個時候對於有四個直角的四邊形，學生提出了直角形、直角四邊形、長方形三種名稱，緊接著出現，探討正方形並不是長方形的聲音。

這是研究者在分類教學活動試教的時候也出現過的狀況，於是研究者告知學生，在數學上，把有四個直角的四邊形，命名為長方

形，國中也把長方形叫做矩形。。

研究者接著提問，若長方形的定義，是有四個直角的四邊形，那麼分類出來的圖形，是不是都是長方形？經過上述的解說後，學生出現了認同正方形是長方形的回應。

但是學生在面對沒有四個直角的四邊形時，就出現了命名上的困難，於是研究者拋出一個名稱，非長方形，這個時候學生就接著回應，那是不是也可以叫做非矩形，研究者與以贊同，接著要學生寫下命名結果，研究者羅列了一些命名的例子，於圖 4-84、圖 4-85。

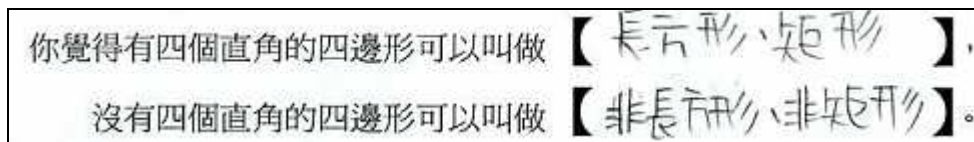


圖 4-84 有無四個直角命名結果例一

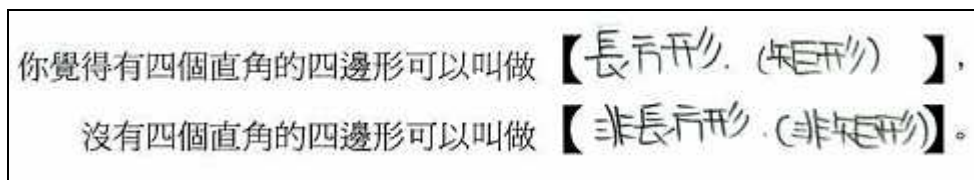


圖 4-85 有無四個直角命名結果例二

隨即進入單準則分類操作 2，四邊形有沒有四個相等的邊？這個時候學生整體的分類速度，已經熟練且比上個分類快很多，研究者採用同樣的方式，從最快完成的那批學生，挑選兩位同學，到講台在黑板寫下分類的結果。

另一方面向全班同學說，如果分類完成後，可以和黑板上的結果進行比對，全班同學幾乎都能夠完成分類操作 2，並且紀錄正確的分類結果，研究者羅列了一些例子，於圖 4-86 到圖 4-88。

第肆章 結果與討論

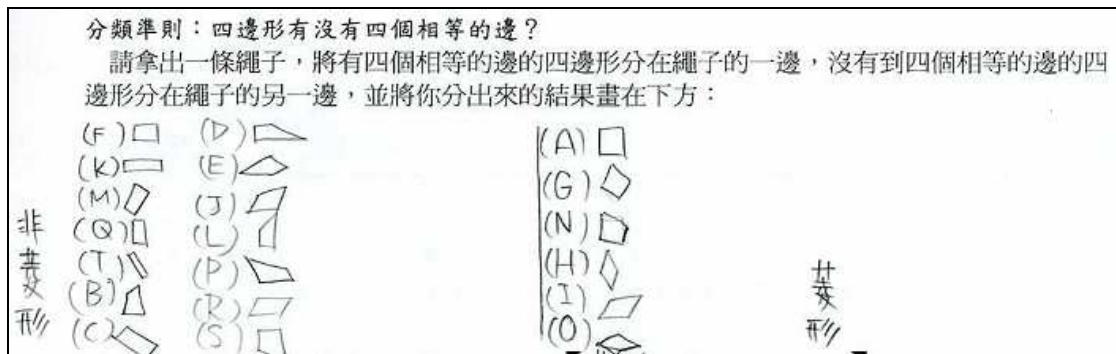


圖 4-86 有無四個等邊的分類紀錄例一

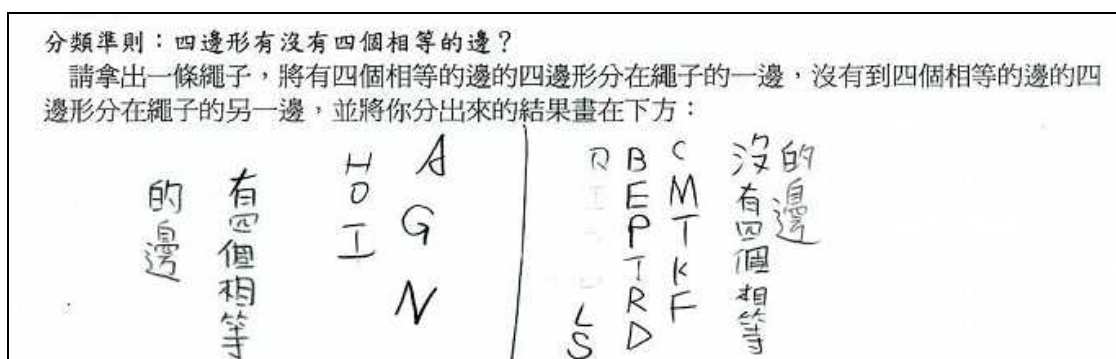


圖 4-87 有無四個等邊的分類紀錄例二

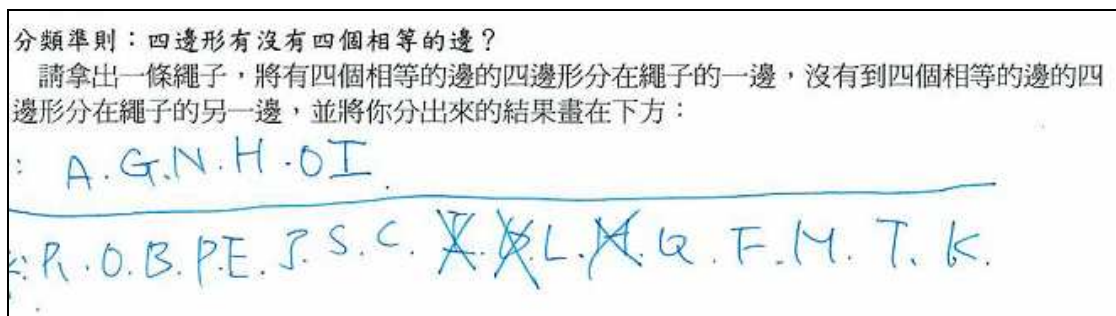


圖 4-88 有無四個等邊的分類紀錄例三

分類完成後，就進入命名的討論，這個時候對於有四個相等的邊的四邊形，學生很一致得，命名為菱形，並且將另一邊的圖形，命名為非菱形，研究者羅列了一些命名的例子，於圖 4-89、圖 4-90。

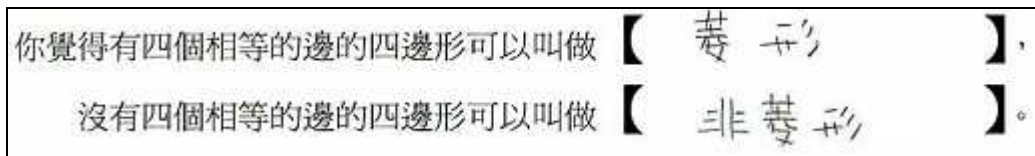


圖 4-89 有無四個等邊命名結果例一

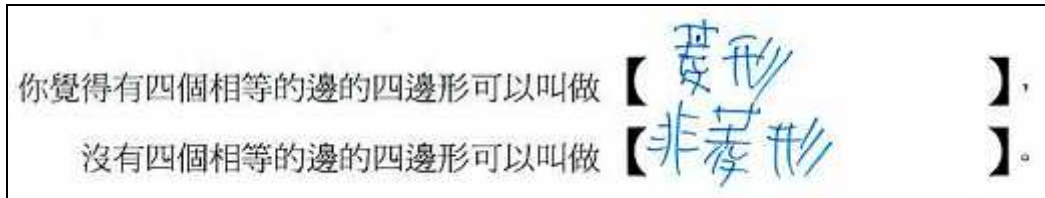


圖 4-90 有無四個等邊命名結果例二

再來進入單準則分類操作 3，四邊形有幾組平行邊？雖然單準則分類操作 3，需要將圖卡分到三個區塊，但學生整體的分類速度仍然熟練，沒有出現無法理解準則的情況。

研究者同樣從最快完成的那批學生，挑選兩位同學，到講台在黑板寫下分類的結果，另一方面向全班同學說，如果分類完成後，可以和黑板上的結果進行比對，全班同學幾乎都能夠完成分類操作 3，並且紀錄正確的分類結果，研究者羅列了一些例子，於圖 4-91 到圖 4-93。

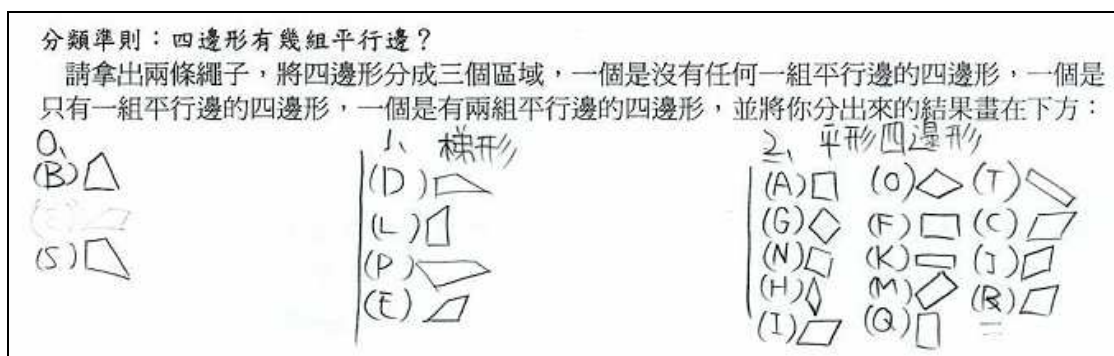


圖 4-91 幾組平行邊分類結果例一

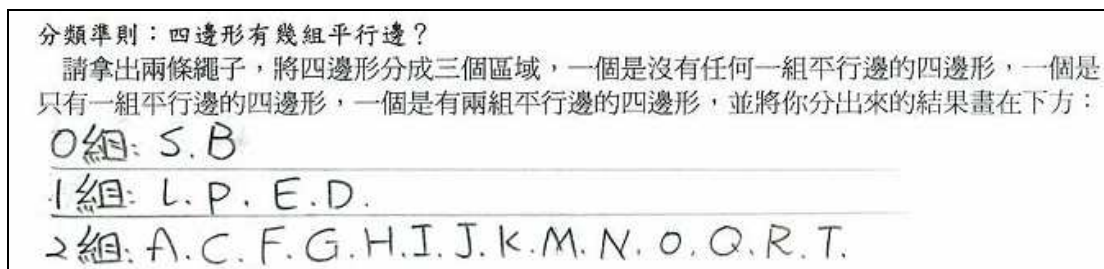


圖 4-92 幾組平行邊分類結果例二

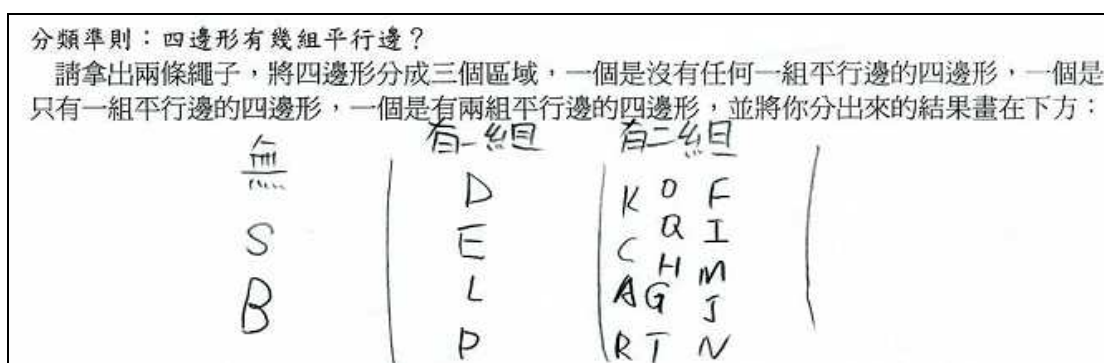


圖 4-93 幾組平行邊分類結果例三

分類完成後，就進入命名的討論，這個時候學生替恰有一組平行邊的四邊形，命名為梯形，替有兩組平行邊的四邊形，命名為平行四邊形。

研究者此刻順著學生的命名，向全體學生介紹，有兩組平行邊的四邊形，就是平行四邊形，所以分出來二組平行邊的那塊區域內，雖然有正方形、長方形、菱形，但它們都屬於平行四邊形的一種，研究者羅列了一些命名的例子，於圖 4-94、圖 4-95。。

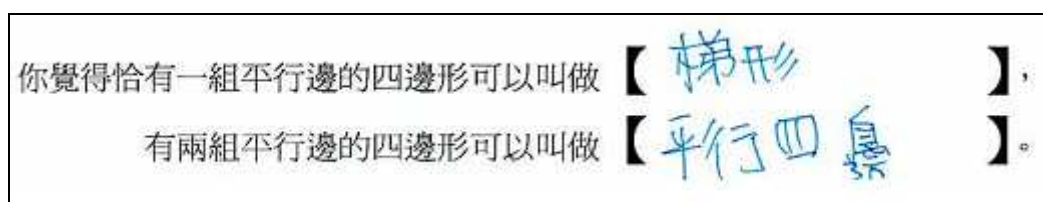


圖 4-94 幾組平行邊命名結果例一

你覺得恰有一組平行邊的四邊形可以叫做【梯形】，
有兩組平行邊的四邊形可以叫做【平行四邊形】。

圖 4-95 幾組平行邊命名結果例二

第四個進行的，是雙準則分類操作 1，同時進行分隔有四個直角的四邊形，與沒四個直角的四邊形，與分隔有四個相等的邊的的四邊形，與沒四個相等的邊的的四邊形，此刻由於出現了兩個分類準則，部分學生發生遲疑，無法理解何謂雙準則分類。

研究者此刻特別強調，同時，指得就是要一起操作，而且都需要滿足，並直接於課堂間巡視，若學生無法理解規則，就實際操作何謂同時分類給學生看。

同樣的，研究者從最快完成的那批學生，挑選兩位同學，到講台在黑板寫下分類的結果，另一方面向全班同學說，如果分類完成後，可以和黑板上的結果進行比對，全班同學幾乎都能夠雙準則分類操作 1，並且紀錄正確的分類結果，研究者羅列了一些例子，於圖 4-96、圖 4-97。

分類準則：

①分隔有四個直角的四邊形，與沒四個直角的四邊形。

②分隔有四個相等的邊的的四邊形，與沒四個相等的邊的的四邊形。

請拿出不同顏色的兩條繩子，其中一條繩子，將有四個直角的四邊形分在繩子的一邊，沒有四個直角的四邊形分在繩子的另一邊。另外一條繩子，將有四個相等的邊的的四邊形分在繩子的一邊，沒有到四個相等的邊的的四邊形分在繩子的另一邊，兩個規則要同時進行，將你分出來的結果畫在下方：

I, H, O	N, G, A
B, C, D, E, J R, L, RS	F, K, M. Q, T

↑有相等邊
↓沒有

圖 4-96 雙準則一分類結果例一

第肆章 結果與討論

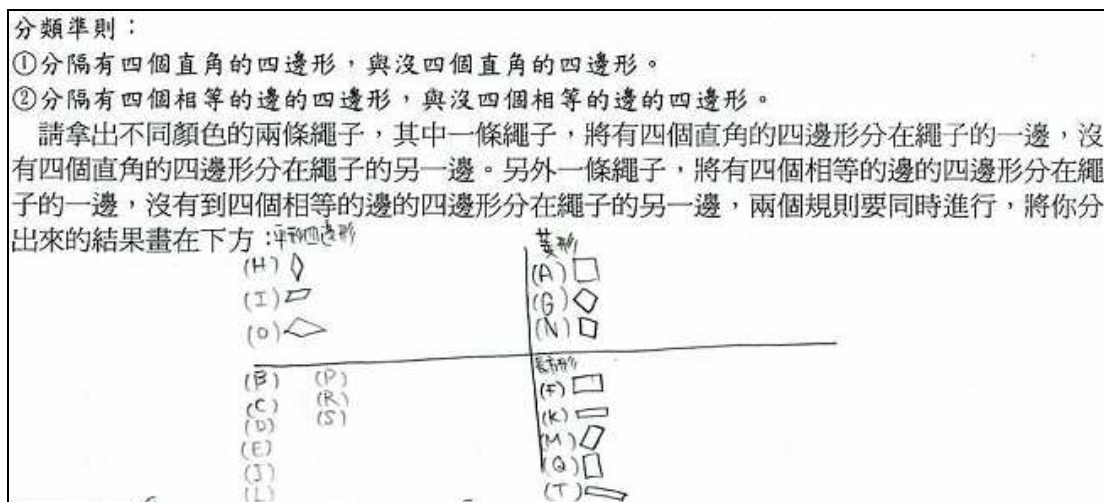


圖 4-97 雙準則一分類結果例二

其後的問題討論內容，是正方形算不算長方形與菱形？由於學生已經歷單準則的分類操作和命名，承襲此脈絡，展現的反應，都能夠接受，正方形算長方形與菱形的一種，但是部分學生能夠寫下原因與理由，部分學生雖認同，卻無法寫下理由，研究者羅列了一些討論問題的作答例子，於圖 4-98、圖 4-99。

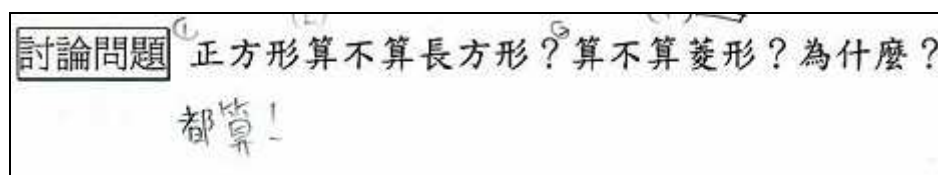


圖 4-98 討論問題作答例一

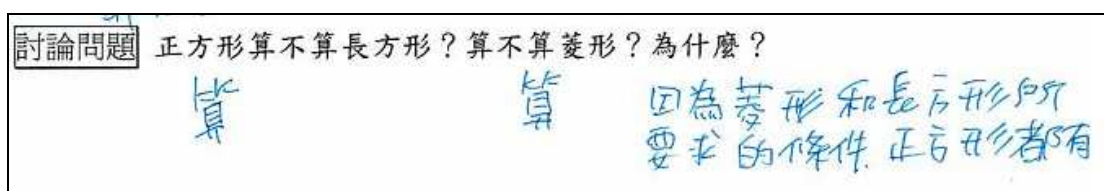


圖 4-99 討論問題作答例二

到了要進行最後一個準則，大約只剩下十分鐘的時間，比起分類教學活動在試教時，稍微不充裕，所以此刻研究者宣佈，最後的十分鐘，請同學記錄操作後，自由回答填寫討論問題，若時間不夠的，只需要把上個分類準則的討論問題完成。

約有七八位同學，完成了最後一個準則的分類，並紀錄填寫了結果，其中有三四位，有填寫討論問題，研究者羅列兩個例子，於圖 4-100、圖 4-101。

分類準則：

①分隔有四個直角的四邊形，與沒四個直角的四邊形。

②分隔沒有任何一組平行邊，只有一組平行邊，有兩組平行邊的四邊形。

請拿出兩種不同顏色的繩子，其中一種顏色一條，另一種顏色兩條；一條繩子的，將有四個直角的四邊形分在繩子的一邊，沒有四個直角的四邊形分在繩子的另一邊。兩條繩子的，將四邊形分成三個區域，一個是沒有任何一組平行邊的四邊形，一個是只有一組平行邊的四邊形，一個是有兩組平行邊的四邊形，兩個規則要同時進行，將你分出來的結果畫在下方：

討論問題 為什麼會有兩個框框裡頭沒有圖形？能夠改變繩子的位置讓兩個沒圖形的框框消失嗎？

因為長方形是互相平行垂直的

圖 4-100 雙準則二填寫例一

第肆章 結果與討論

分類準則：

① 分隔有四個直角的四邊形，與沒四個直角的四邊形。

② 分隔沒有任何一組平行邊，只有一組平行邊，有兩組平行邊的四邊形。

請拿出兩種不同顏色的繩子，其中一種顏色一條，另一種顏色兩條；一條繩子的，將有四個直角的四邊形分在繩子的一邊，沒有四個直角的四邊形分在繩子的另一邊。兩條繩子的，將四邊形分成三個區域，一個是沒有任何一組平行邊的四邊形，一個是只有一組平行邊的四邊形，一個是有兩組平行邊的四邊形，兩個規則要同時進行，將你分出來的結果畫在下方：



討論問題 為什麼會有兩個框框裡頭沒有圖形？能夠改變繩子的位置讓兩個沒圖形的框框消失嗎？

- ① 因為有四個直角排列組合成一個形狀，這個形狀兩組邊必平行，②

圖 4-101 雙準則二填寫例二

第四節 後測與延後測評量結果

後測評量實施於 7C、7D 兩個班，延後測實施於 7C、7D、7E 班三個班，本節所使用的長條圖中，將進行非典型例性質察覺教學活動實驗的 7C，圖例代號用「察覺」表示，進行分類教學活動實驗的 7D，圖例代號用「分類」表示，作為延後測對照組的 7E，圖例代號用「對照」表示。

後測與延後測評量有兩個大題，先來看第一大題，共有十一小題，第一小題，目的在探測，是學生是否受到方位影響，存在正方形必須擺成正正方方、水平擺放的典型例迷思類型。

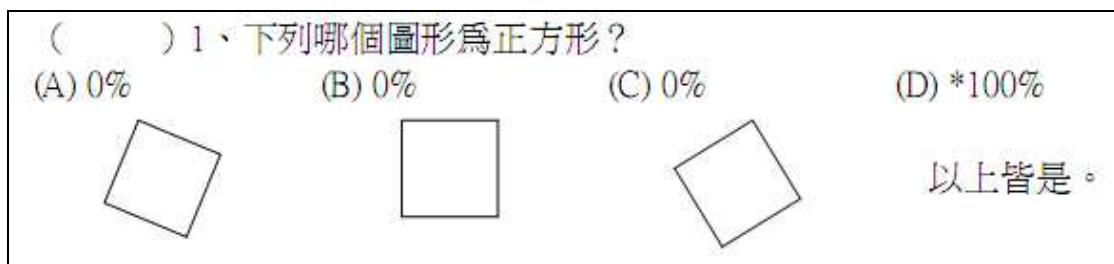


圖 4-102 後測正方形典型例迷思分類組

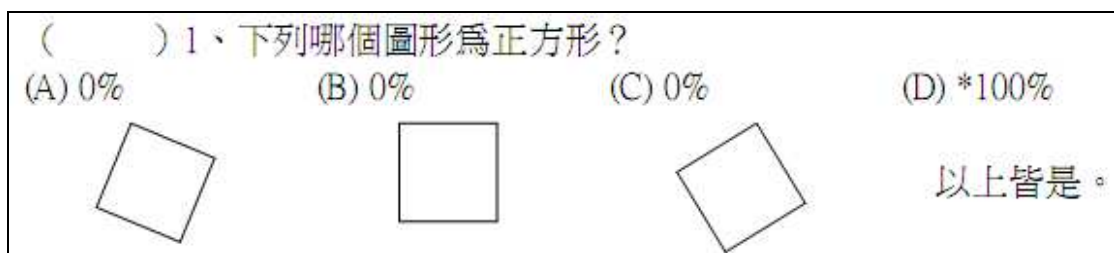


圖 4-103 後測正方形典型例迷思察覺組

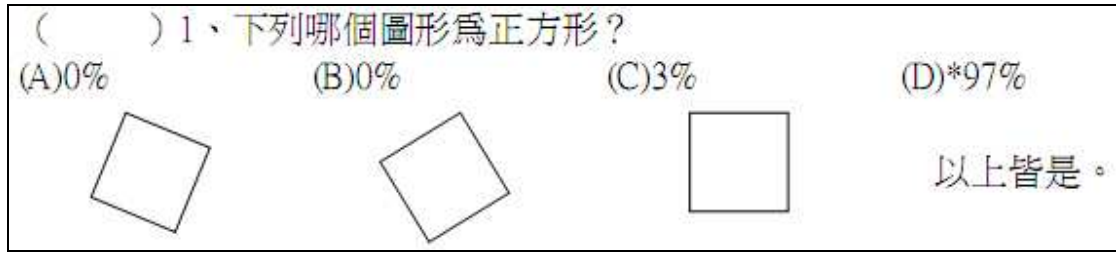


圖 4-104 延後測正方形典型例迷思分類組

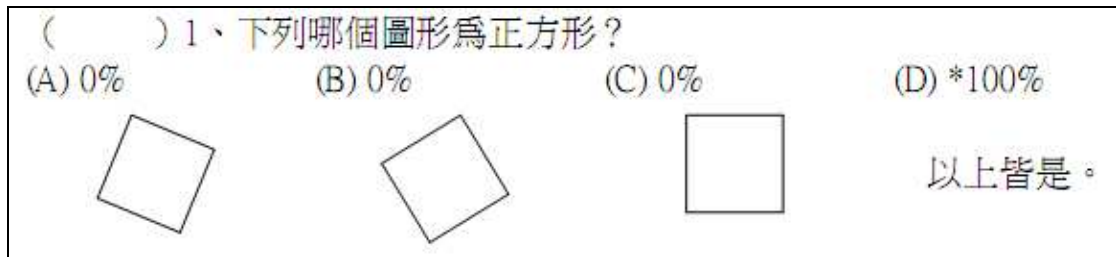


圖 4-105 延後測正方形典型例迷思察覺組

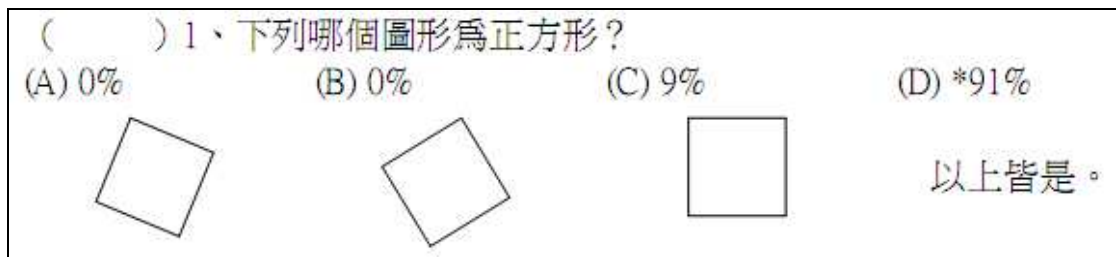


圖 4-106 延後測正方形典型例迷思對照組

此處將題目選項編碼，後測依測驗-大題-題-選項，依序編碼為 a-I-1-A 到 a-II-5，延後測依測驗-大題-題-選項，依序編碼為 f-I-1-A 到 f-II-5。

在 a-I-1 中，分類組的答對率為 100%，察覺組的答對率為 100%，此結果列於圖 4-107，本題顯示，兩組都沒有發生正方形辨識迷思，方位錯誤的典型例迷思類型。

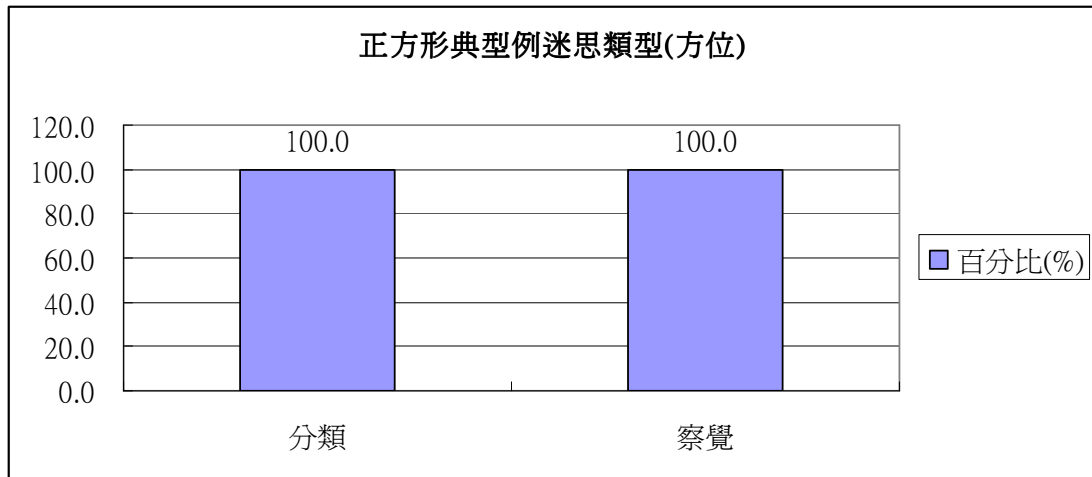


圖 4-107 後測正方形典型例迷思答對率長條圖

到了 f-I-1 中，分類組的答對率為 96.8%，察覺組的答對率為 100%，察覺組的答對率為 91.2%，此結果列於圖 4-108。

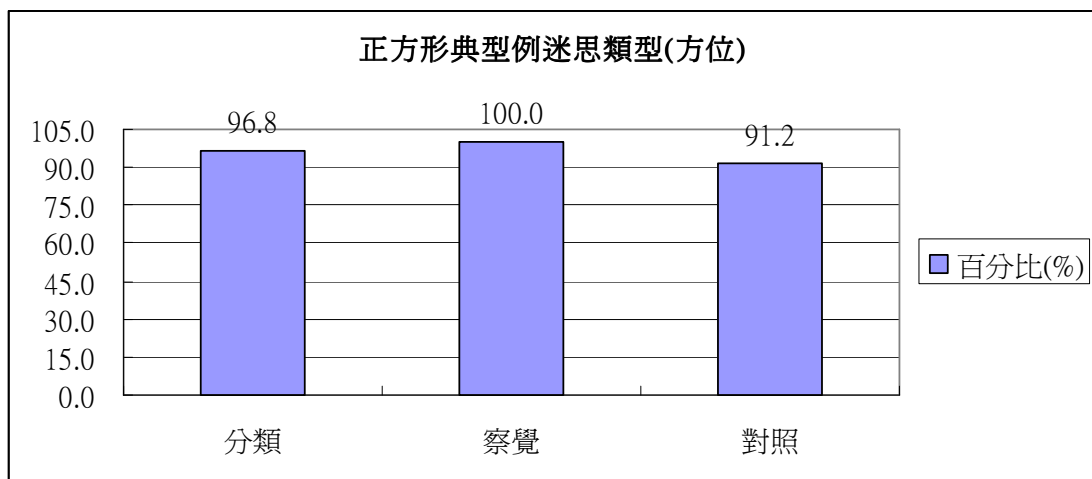


圖 4-108 延後測正方形典型例迷思答對率長條圖

第二小題在偵測，學生在四邊形的辨識迷思中，是否存在正方形辨識上，空間視覺的迷思類型

() 2、右圖是平面上的一個圖形，它是一個正方形嗎？
(A) 不是，因為它沒有四個直角。*84% (B) 不是，它是長方形。0%
(C) 是，因為它四邊等長。3% (D) 是，換個角度來看他就是正方形。13%

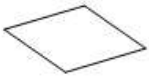


圖 4-109 後測正方形空間視覺迷思分類組

() 2、右圖是平面上的一個圖形，它是一個正方形嗎？
(A) 不是，因為它沒有四個直角。*56% (B) 不是，它是長方形。0%
(C) 是，因為它四邊等長。21% (D) 是，換個角度來看他就是正方形。24%

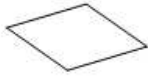


圖 4-110 後測正方形空間視覺迷思察覺組

() 2、右圖是平面上的一個圖形，它是一個正方形嗎？
(A) 是，因為它有四邊等長。3%(B) 是，換個角度來看他就是正方形。10%
(C) 不是，它是長方形。0% (D) 不是，因為它沒有四個直角。*87%




圖 4-111 延後測正方形空間視覺迷思分類組

() 2、右圖是平面上的一個圖形，它是一個正方形嗎？
(A) 是，因為它有四邊等長。21%(B) 是，換個角度來看他就是正方形。12%
(C) 不是，它是長方形。0% (D) 不是，因為它沒有四個直角。*68%




圖 4-112 延後測正方形空間視覺迷思察覺組

() 2、右圖是平面上的一個圖形，它是一個正方形嗎？
(A) 是，因為它有四邊等長。6%(B) 是，換個角度來看他就是正方形。3%
(C) 不是，它是長方形。6% (D) 不是，因為它沒有四個直角。*82%




圖 4-113 延後測正方形空間視覺迷思對照組

在 a-I-2 中，分類組的答對率為 83.9%，察覺組的答對率為 55.9%，此結果列於圖 4-114。本題顯示，分類教學活動改善此迷思的情況，較非典型例性質察覺教學活動來得好。

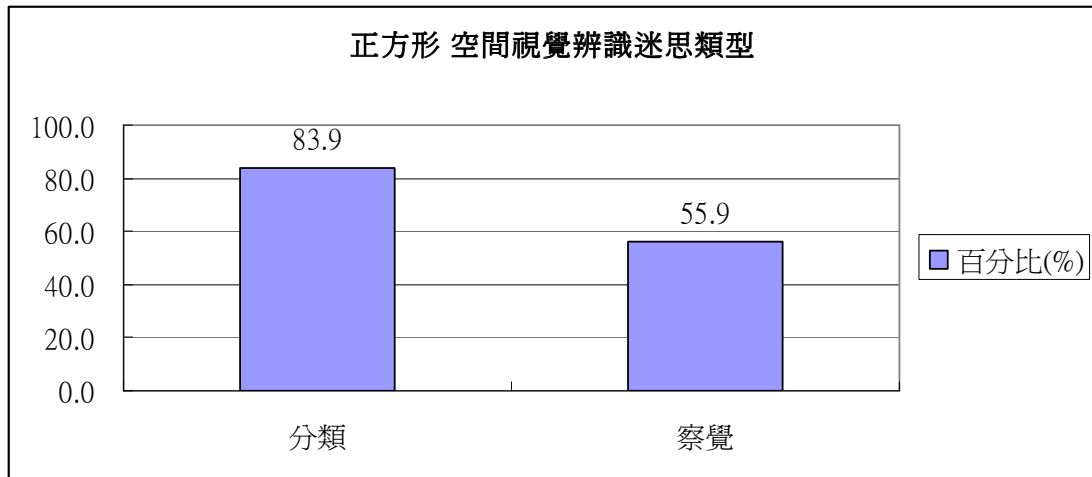


圖 4-114 後測正方形空間視覺迷思答對率長條圖

到了 f-I-2 中，分類組的答對率為 87.1%，察覺組的答對率為 67.6%，對照組的答對率為 82.4%，此結果列於圖 4-115，分類組與察覺組都較後測時的表現好，但察覺組的表現遜於對照組，此結果令研究者感到意外。

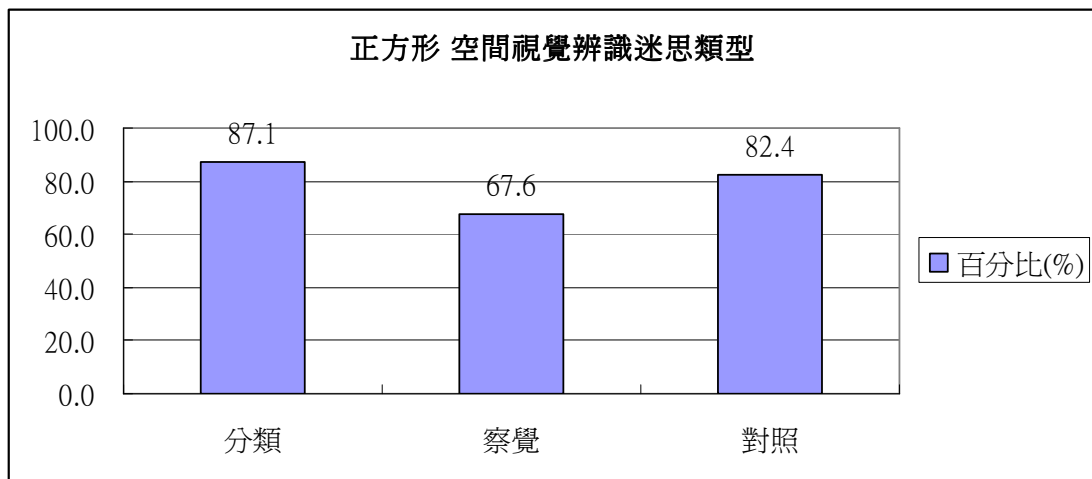


圖 4-115 延後測正方形空間視覺迷思答對率長條圖

第三小題的測驗目的，在學生能否接受正方形也是長方形，此題使用線段、角的數學符號，難度較高。

第肆章 結果與討論

() 3、若四邊形 DEFG 是一個長方形， \overline{DE} 為長方形的長， \overline{EF} 為寬，則

(A) $\overline{DE} > \overline{EF}$ 16% (B) $\angle D$ 、 $\angle E$ 、 $\angle F$ 、 $\angle G$ 均為 90° *10%

(C) \overline{DE} 與 \overline{EF} 不可以相等 0% (D) 以上皆是。 74%

P Q

圖 4-116 後測文字敘述正方形是否為長方形分類組

() 3、若四邊形 DEFG 是一個長方形， \overline{DE} 為長方形的長， \overline{EF} 為寬，則

(A) $\overline{DE} > \overline{EF}$ 9% (B) $\angle D$ 、 $\angle E$ 、 $\angle F$ 、 $\angle G$ 均為 90° *26%

(C) \overline{DE} 與 \overline{EF} 不可以相等 3% (D) 以上皆是。 59%

P Q

圖 4-117 後測文字敘述正方形是否為長方形察覺組

() 3、若四邊形 DEFG 是一個長方形， \overline{DE} 為長方形的寬， \overline{EF} 為長，則

(A) \overline{DE} 長度應該小於 \overline{EF} 長度 10% (B) $\angle D$ 、 $\angle E$ 、 $\angle F$ 、 $\angle G$ 均為 90° *26%

(C) \overline{DE} 與 \overline{EF} 不可以等長 3% (D) 以上選項都對。61%

圖 4-118 延後測文字敘述正方形是否為長方形分類組

() 3、若四邊形 DEFG 是一個長方形， \overline{DE} 為長方形的寬， \overline{EF} 為長，則

(A) \overline{DE} 長度應該小於 \overline{EF} 長度 24% (B) $\angle D$ 、 $\angle E$ 、 $\angle F$ 、 $\angle G$ 均為 90° *41%

(C) \overline{DE} 與 \overline{EF} 不可以等長 3% (D) 以上選項都對。32%

圖 4-119 延後測文字敘述正方形是否為長方形察覺組

() 3、若四邊形 DEFG 是一個長方形， \overline{DE} 為長方形的寬， \overline{EF} 為長，則

(A) \overline{DE} 長度應該小於 \overline{EF} 長度 12% (B) $\angle D$ 、 $\angle E$ 、 $\angle F$ 、 $\angle G$ 均為 90° *9%

(C) \overline{DE} 與 \overline{EF} 不可以等長 9% (D) 以上選項都對。71%

圖 4-120 延後測文字敘述正方形是否為長方形對照組

在 a-I-3 中，分類組的答對率為 9.7%，察覺組的答對率為 26.5%，此結果列於圖 4-121，本題顯示，察覺組的表現較好，但整體而言，學生的答對率偏低。

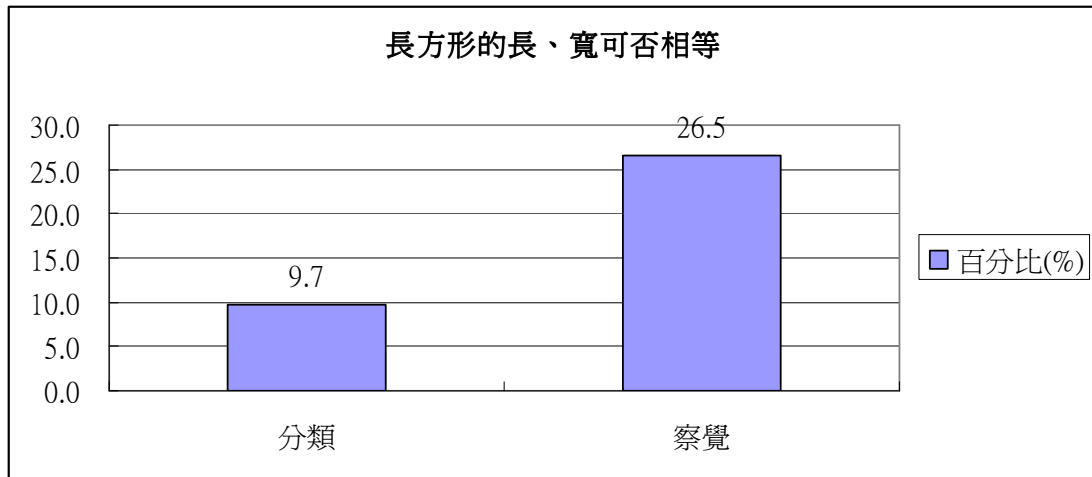


圖 4-121 後測文字敘述正方形是否為長方形答對率長條圖

到了 f-I-3 中，分類組的答對率為 25.8%，察覺組的答對率為 41.2%，對照組的答對率為 8.8%，此結果列於圖 4-122，察覺組的表現仍然較好，分類、察覺組答對率均較後測為優，也比對照組明顯較高。

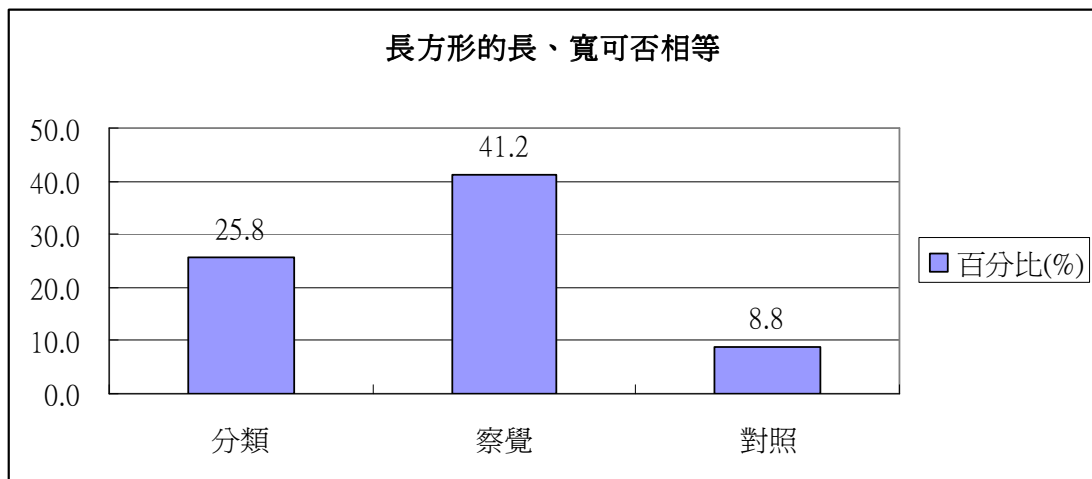


圖 4-122 延後測文字敘述正方形是否為長方形答對率長條圖

第四小題的測驗目的，也是在探測學生，能否接受長方形的長與寬可以相等，本題使用四邊形 PQRS 與線段符號的表徵，仍然是難度較高的題目。

第肆章 結果與討論

(C) \overline{DE} 與 \overline{EF} 不可以相等 0% (D) 以上皆是。 74%

() 4、右圖四邊形 PQRS 的四個角均為 90° ，則在何種情況下，PQRS 為長方形？(A) $\overline{PQ} = 4$ 、 $\overline{QR} = 4$ 10% (B) $\overline{PQ} = 4$ 、 $\overline{QR} = 4.1$ 48%
(C) $\overline{PQ} = 4.1$ 、 $\overline{QR} = 4.1$ 6% (D) 以上皆是。*35%

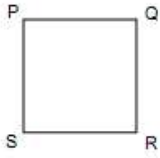


圖 4-123 後測數字敘述正方形是否為長方形分類組

(C) \overline{DE} 與 \overline{EF} 不可以相等 3% (D) 以上皆是。 59%

() 4、右圖四邊形 PQRS 的四個角均為 90° ，則在何種情況下，PQRS 為長方形？(A) $\overline{PQ} = 4$ 、 $\overline{QR} = 4$ 15% (B) $\overline{PQ} = 4$ 、 $\overline{QR} = 4.1$ 44%
(C) $\overline{PQ} = 4.1$ 、 $\overline{QR} = 4.1$ 3% (D) 以上皆是。*38%

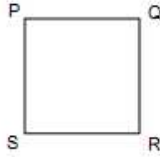


圖 4-124 後測數字敘述正方形是否為長方形察覺組

() 4、右圖四邊形 PQRS 的四個角均為 90° ，則在何種情況下，PQRS 為長方形？(A) $\overline{PQ} = 6$ 、 $\overline{QR} = 6$ 19% (B) $\overline{PQ} = 6$ 、 $\overline{QR} = 6.1$ 55%
(C) $\overline{PQ} = 6.1$ 、 $\overline{QR} = 6.1$ 0% (D) 選項 A、B、C 都可以。*26%

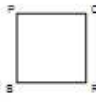


圖 4-125 延後測數字敘述正方形是否為長方形分類組

() 4、右圖四邊形 PQRS 的四個角均為 90° ，則在何種情況下，PQRS 為長方形？(A) $\overline{PQ} = 6$ 、 $\overline{QR} = 6$ 21% (B) $\overline{PQ} = 6$ 、 $\overline{QR} = 6.1$ 24%
(C) $\overline{PQ} = 6.1$ 、 $\overline{QR} = 6.1$ 12% (D) 選項 A、B、C 都可以。*44%

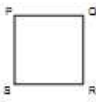


圖 4-126 延後測數字敘述正方形是否為長方形察覺組

() 4、右圖四邊形 PQRS 的四個角均為 90° ，則在何種情況下，PQRS 為長方形？(A) $\overline{PQ} = 6$ 、 $\overline{QR} = 6$ 12% (B) $\overline{PQ} = 6$ 、 $\overline{QR} = 6.1$ 74%
(C) $\overline{PQ} = 6.1$ 、 $\overline{QR} = 6.1$ 3% (D) 選項 A、B、C 都可以。*9%

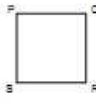


圖 4-127 延後測數字敘述正方形是否為長方形對照組

在 a-I-4 中，分類組的答對率為 35.5%，察覺組的答對率為 38.2%，此結果列於圖 4-128，本題顯示，分類組與察覺組的表現相仿。

值得注意的是，在 a-I-3 中，所要偵測的概念相同，但主要以文字表徵為主軸設計問題，此時，分類組的表現遜於察覺組許多，但到了以圖形表徵為主軸設計問題時，兩組表現相仿。

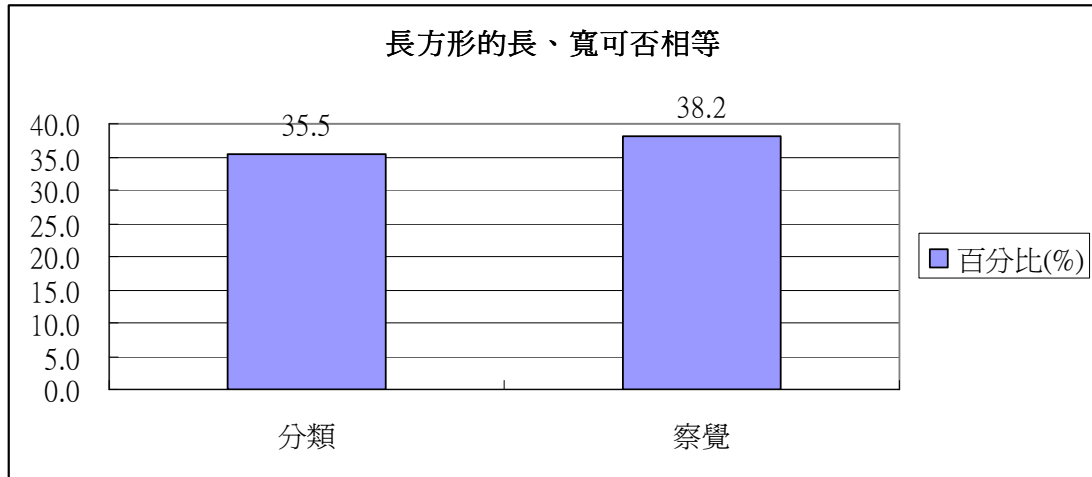


圖 4-128 後測數字敘述正方形是否為長方形答對率長條圖

到了 f-I-4 中，分類組的答對率為 25.8%，察覺組的答對率為 44.1%，對照組的答對率為 8.8%，此結果列於圖 4-129，後測出現的趨勢消失了，察覺組的表現上升，分類組的表現下降，分類、察覺組答對率比對照組明顯都較高。

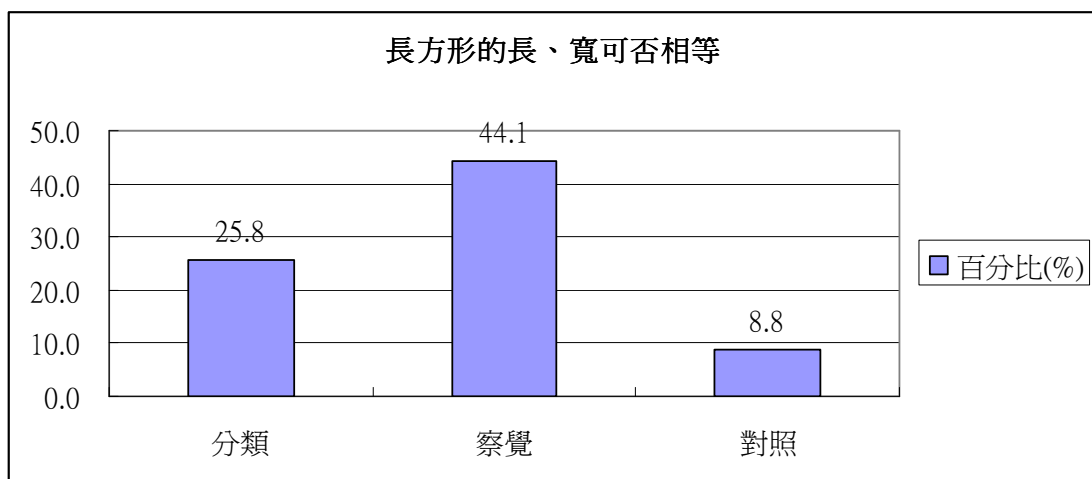



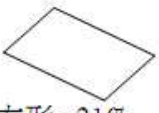
圖 4-129 延後測數字敘述正方形是否為長方形答對率長條圖

第五小題，目的偵測學生在辨識長方形時，是否出現辨識迷思的空間視覺類型

() 5、右圖是平面上的一個圖形，它是一個長方形嗎？

(A) 不是，因為它沒有四個直角。*61% (B) 不是，它是正方形。0%
(C) 是，因為它對邊平行。10% (D) 是，換個角度來看他就是長方形。29%

圖 4-130 後測長方形空間視覺迷思分類組

() 5、右圖是平面上的一個圖形，它是一個長方形嗎？

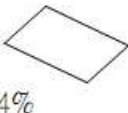
(A) 不是，因為它沒有四個直角。*50% (B) 不是，它是正方形。0%
(C) 是，因為它對邊平行。29% (D) 是，換個角度來看他就是長方形。21%

圖 4-131 後測長方形空間視覺迷思察覺組

() 5、右圖是平面上的一個圖形，它是一個長方形嗎？

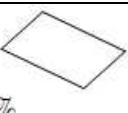
(A) 不是，因為它沒有四個直角。*65% (B) 是，因為它對邊平行。13%
(C) 不是，它是正方形。3% (D) 是，換個角度來看他就是長方形。19%

圖 4-132 延後測長方形空間視覺迷思分類組

() 5、右圖是平面上的一個圖形，它是一個長方形嗎？

(A) 不是，因為它沒有四個直角。*59% (B) 是，因為它對邊平行。15%
(C) 不是，它是正方形。3% (D) 是，換個角度來看他就是長方形。24%

圖 4-133 延後測長方形空間視覺迷思察覺組

() 5、右圖是平面上的一個圖形，它是一個長方形嗎？

(A) 不是，因為它沒有四個直角。*74% (B) 是，因為它對邊平行。18%
(C) 不是，它是正方形。3% (D) 是，換個角度來看他就是長方形。6%

圖 4-134 延後測長方形空間視覺迷思對照組

在 a-I-5 中，分類組的答對率為 61.3%，察覺組的答對率為 50.0%，此結果列於圖 4-135，本題顯示，分類組的表現較佳。

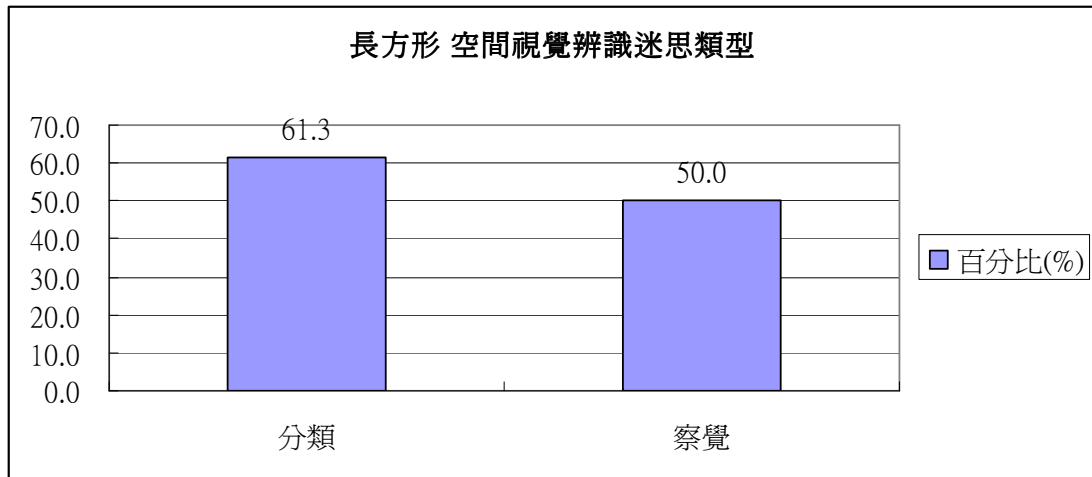


圖 4-135 後測長方形空間視覺迷思答對率長條圖

到了 f-I-5 中，分類組的答對率為 64.5%，察覺組的答對率為 58.8%，對照組的答對率為 73.5%，此結果列於圖 4-136，本題顯示，分類組與查覺組的趨勢與後測相仿，但令研究者意外的是，分類組與查覺組的表現均遜於對照組。

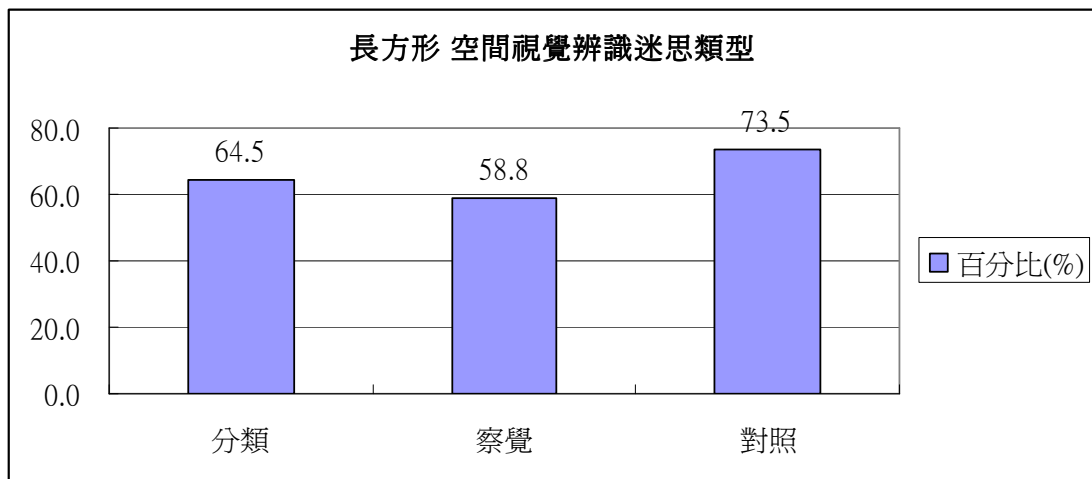


圖 4-136 延後測長方形空間視覺迷思答對率長條圖

第六小題的測驗目的，是探測學生能否接受，正方形也是長方形的一種。



() 6、哪個圖形是長方形？			
(A) 58%	(B) 0%	(C) *42%	(D) 0%
		A、B 兩者皆是	A、B 兩者皆否

圖 4-137 後測正方形是否為長方形分類組



() 6、哪個圖形是長方形？			
(A) 50%	(B) 3%	(C) *47%	(D) 0%
		A、B 兩者皆是	A、B 兩者皆否

圖 4-138 後測正方形是否為長方形察覺組



() 6、哪個圖形是長方形？			
(A) 3%	(B) 52%	(C) *45%	(D) 0%
		A、B 兩者皆是	A、B 兩者皆否

圖 4-139 延後測正方形是否為長方形分類組



() 6、哪個圖形是長方形？			
(A) 0%	(B) 38%	(C) *62%	(D) 0%
		A、B 兩者皆是	A、B 兩者皆否

圖 4-140 延後測正方形是否為長方形察覺組

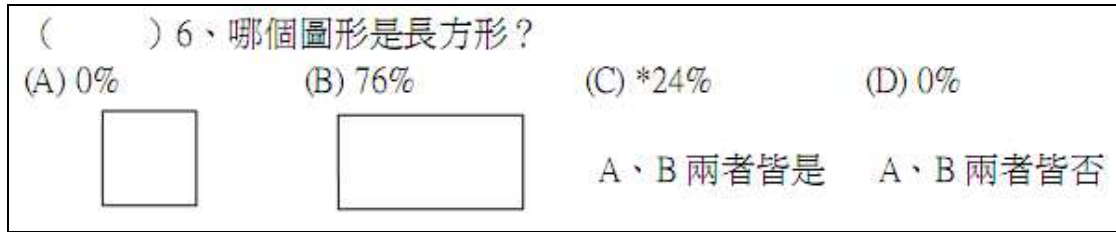


圖 4-141 延後測正方形是否為長方形對照組

在 a-I-6 中，分類組的答對率為 41.9%，察覺組的答對率為 47.1%，此結果列於圖 4-142，本題顯示，仍然有約一半的學生，經過教學活動之後，無法接受正方形是長方形的一種。

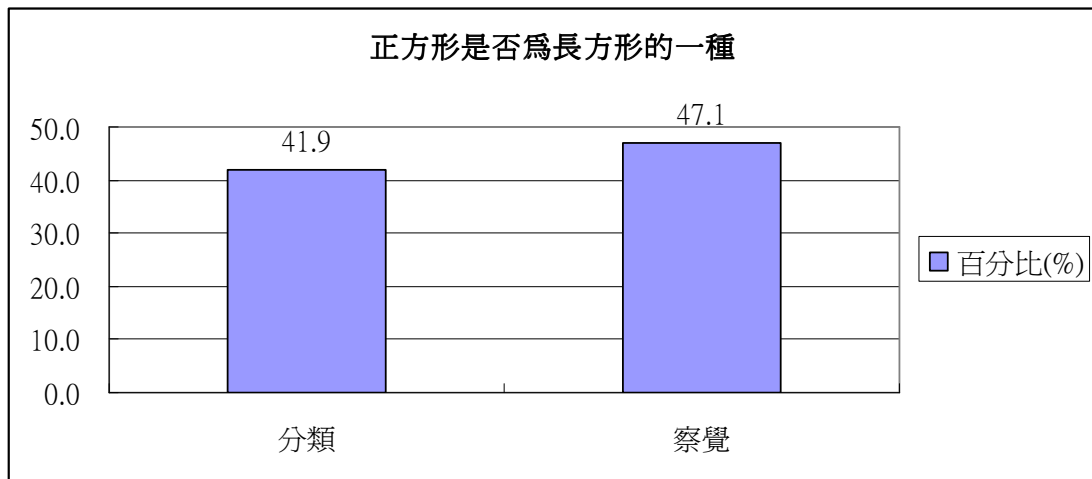


圖 4-142 後測正方形是否為長方形答對率長條圖

到了 f-I-6 中，分類組的答對率為 45.2%，察覺組的答對率為 61.8%，對照組的答對率為 23.5%，此結果列於圖 4-143，本題顯示，分類組與察覺組的表現均有上升，且均較對照組為優。

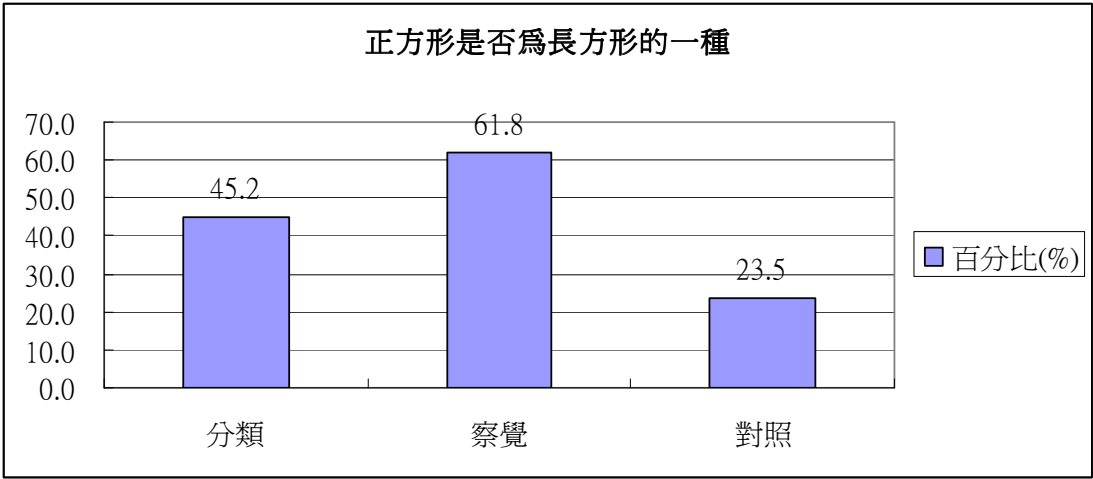


圖 4-143 延後測正方形是否為長方形答對率長條圖

第七小題目的，在偵測菱形辨識問題的典型例類型，有學生會認為，菱形的對角線必須一條是鉛直線，另一條是水平線，即使是同一個圖形，方位不這樣擺放，就不能是菱形。

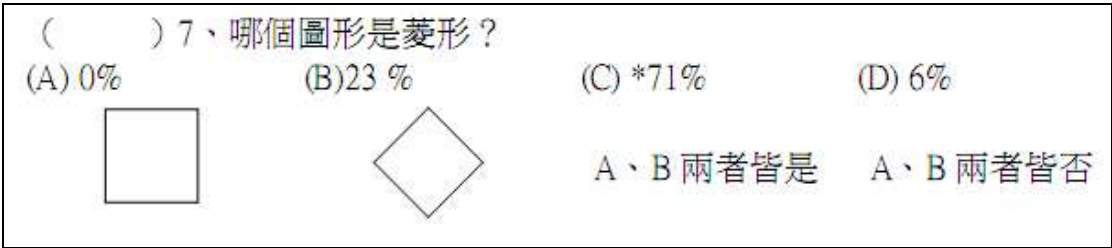


圖 4-144 後測菱形典型例迷思分類組

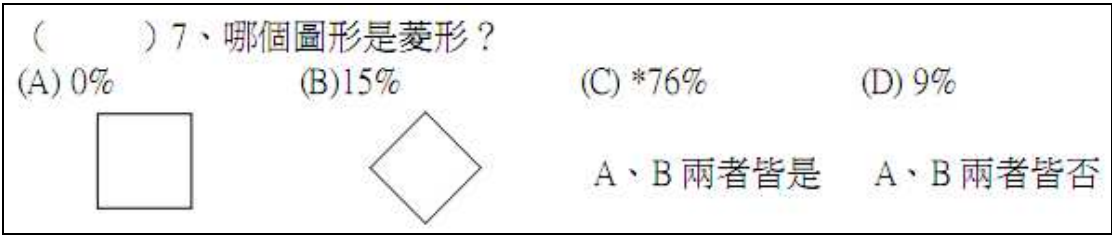


圖 4-145 後測菱形典型例迷思察覺組

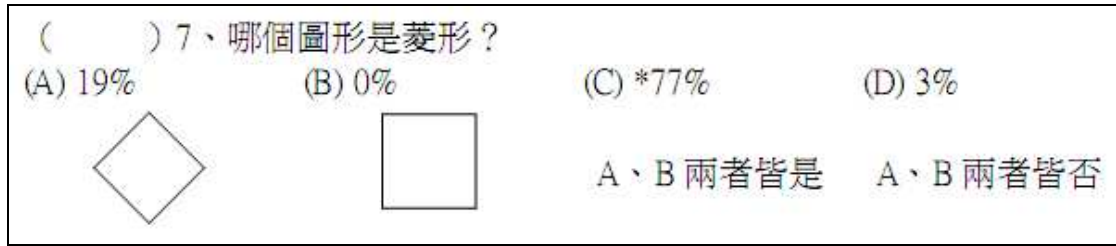


圖 4-146 延後測菱形典型例迷思分類組

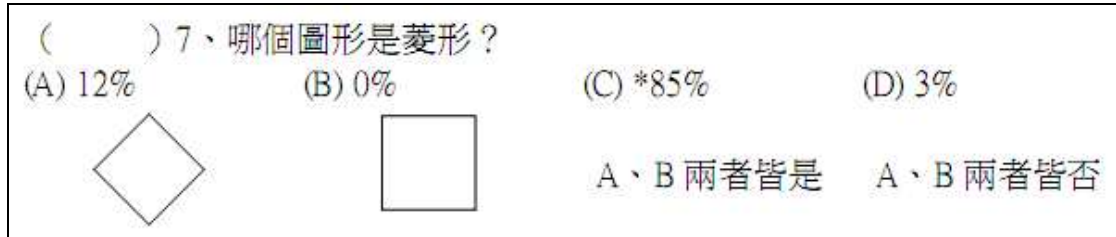


圖 4-147 延後測菱形典型例迷思察覺組

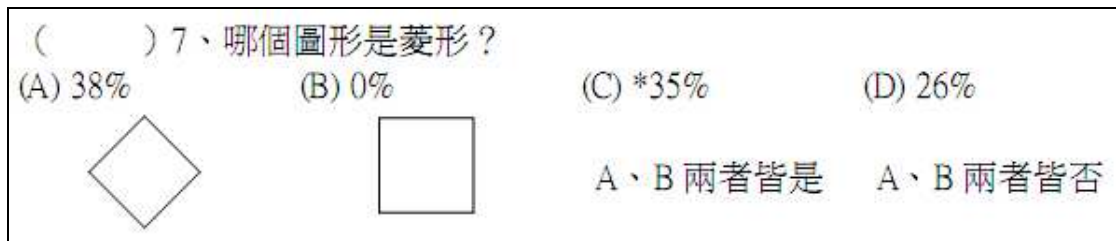


圖 4-148 延後測菱形典型例迷思對照組

在 a-I-7 中，分類組的答對率為 71.0%，察覺組的答對率為 76.5%，此結果列於圖 4-149，本題顯示，兩組表現相仿。

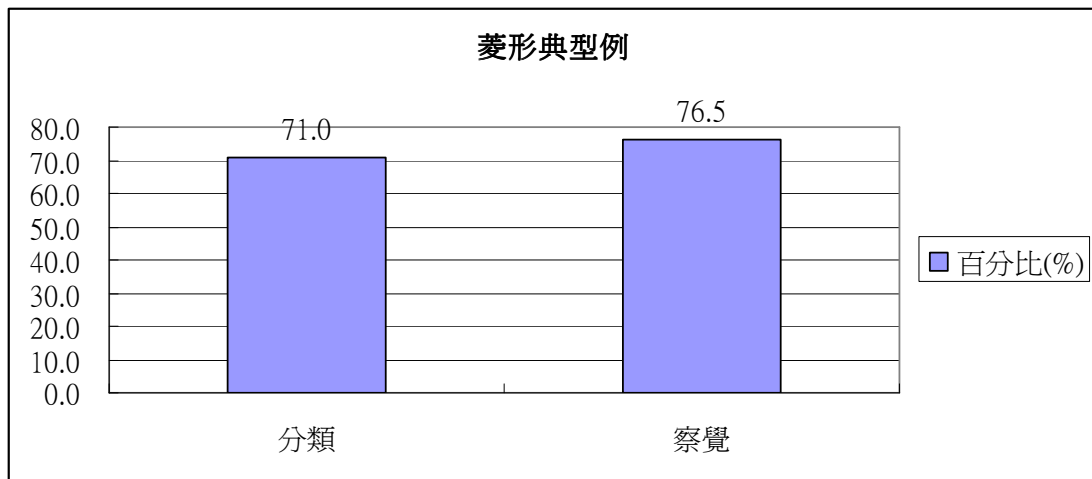


圖 4-149 後測菱形典型例迷思答對率長條圖

到了 f-I-7 中，分類組的答對率為 77.4%，察覺組的答對率為 85.3%，對照組的答對率為 35.3%，此結果列於圖 4-150，本題顯示，趨勢與後測相同，此外，分類組與察覺組的表現均有上升，且均較對照組為優。

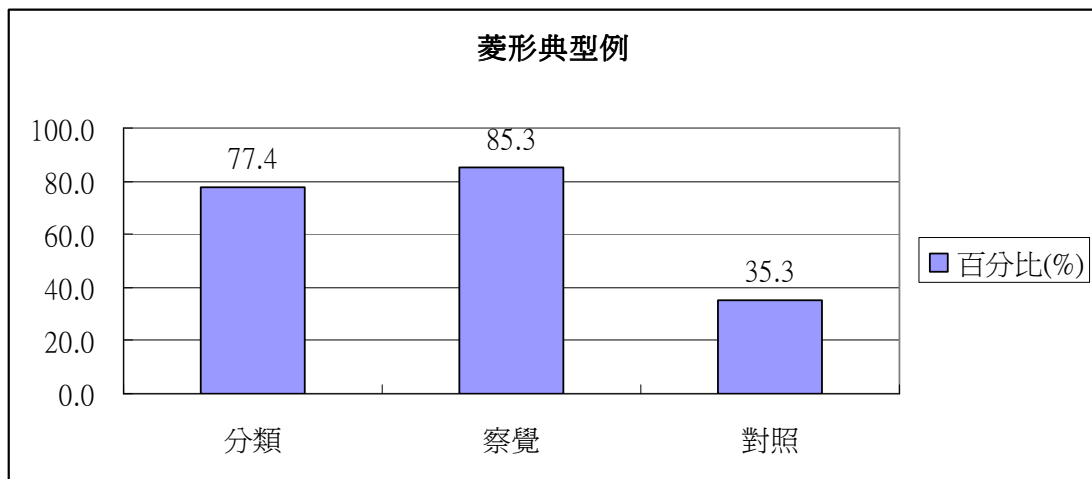


圖 4-150 延後測菱形典型例迷思答對率長條圖

第八小題目的，在偵測互斥思維辨識迷思類型，包含關係的部份，常見到學生會認為，這個圖形既然是正方形了，就不能算是平行四邊形。

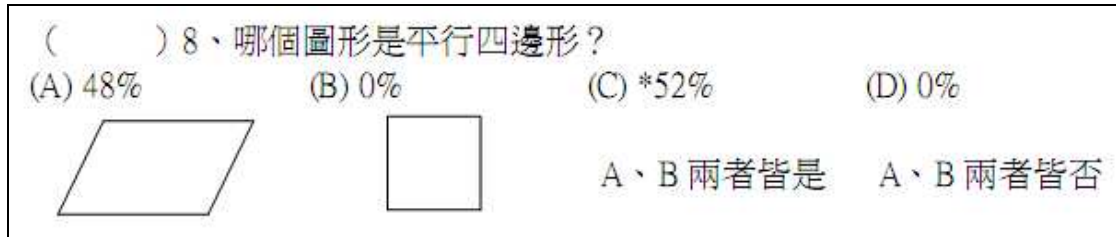


圖 4-151 後測平行四邊形與正方形互斥分類組

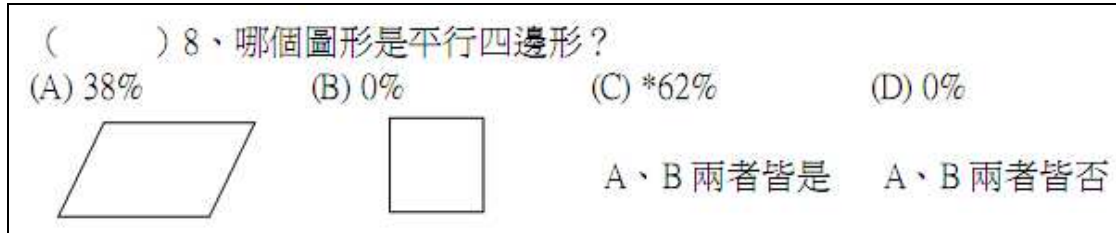


圖 4-152 後測平行四邊形與正方形互斥察覺組

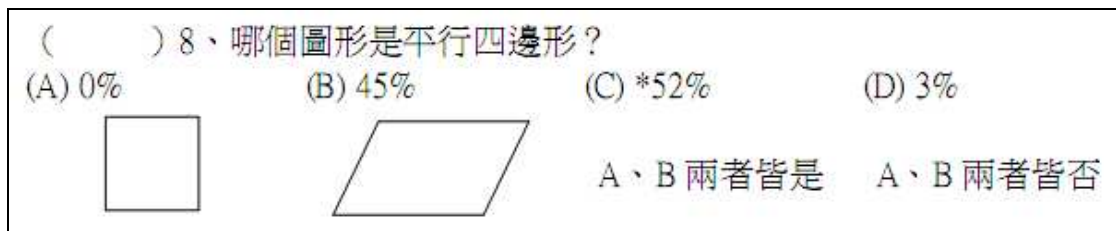


圖 4-153 延後測平行四邊形與正方形互斥分類組

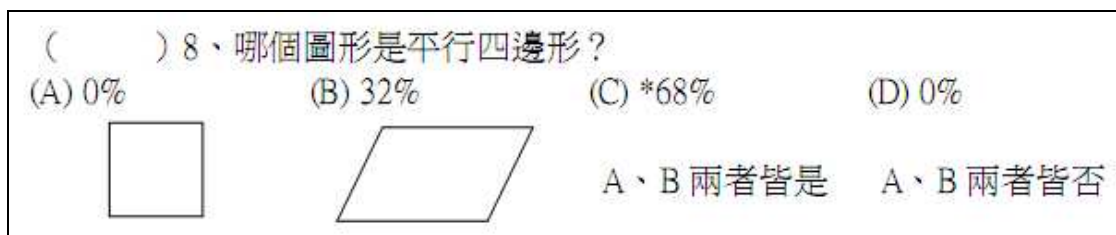


圖 4-154 延後測平行四邊形與正方形互斥察覺組

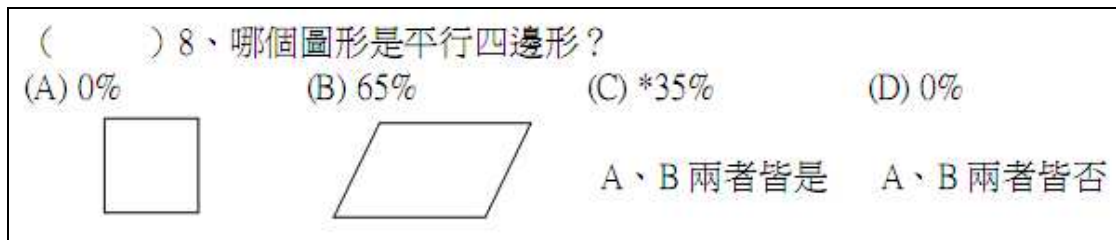


圖 4-155 延後測平行四邊形與正方形互斥對照組

在 a-I-8 中，分類組的答對率為 51.6%，察覺組的答對率為 61.8%，此結果列於圖 4-156，本題顯示，察覺組的表現略佳，整體而言，學生經過教學活動後，比起正方形是長方形的一種，較能接受正方形是平行四邊形的一種。

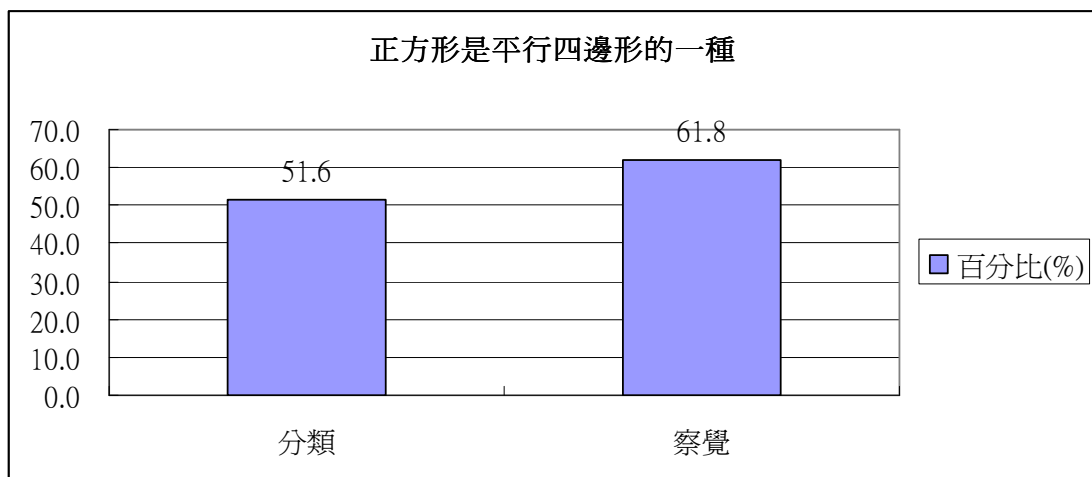


圖 4-156 後測平行四邊形與正方形互斥答對率長條圖

到了 f-I-8 中，分類組的答對率為 51.6%，察覺組的答對率為 67.6%，對照組的答對率為 35.3%，此結果列於圖 4-157，本題顯示，分類組持平，察覺組略微上升，分類組與察覺組的表現均較對照組為優。

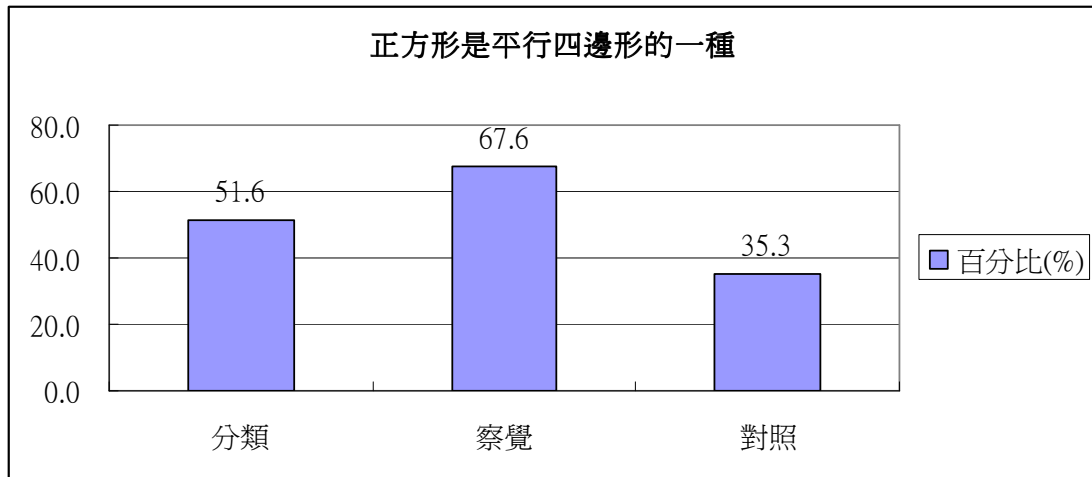




圖 4-157 延後測平行四邊形與正方形互斥答對率長條圖

第九小題目的，在偵測互斥思維辨識迷思類型，包含關係的部份，常見到學生會認為，這個圖形既然是長方形了，就不能算是平行四邊形。

() 9、哪個圖形是平行四邊形？

(A) 0% (B) 10% (C) *55% (D) 35%






A、B 兩者皆是


A、B 兩者皆否

圖 4-158 後測平行四邊形與長方形互斥分類組

() 9、哪個圖形是平行四邊形？

(A) 0% (B) 9% (C) *71% (D) 21%





A、B 兩者皆是

A、B 兩者皆否

圖 4-159 後測平行四邊形與長方形互斥察覺組

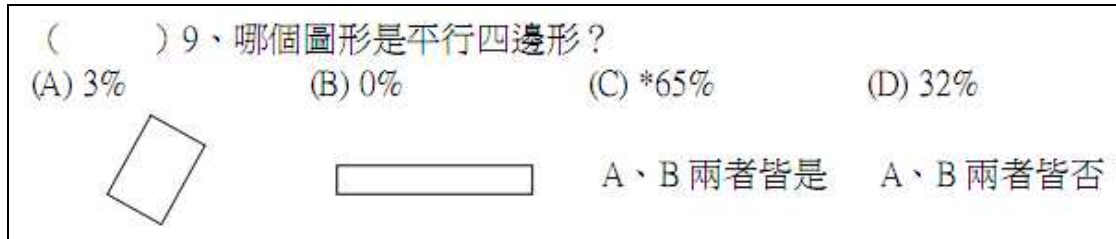


圖 4-160 延後測平行四邊形與長方形互斥分類組

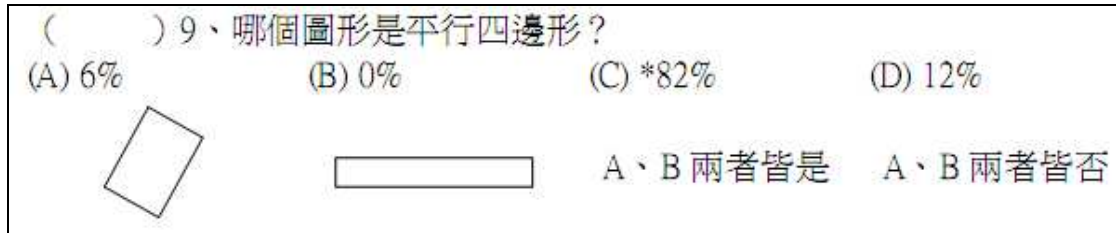


圖 4-161 延後測平行四邊形與長方形互斥察覺組

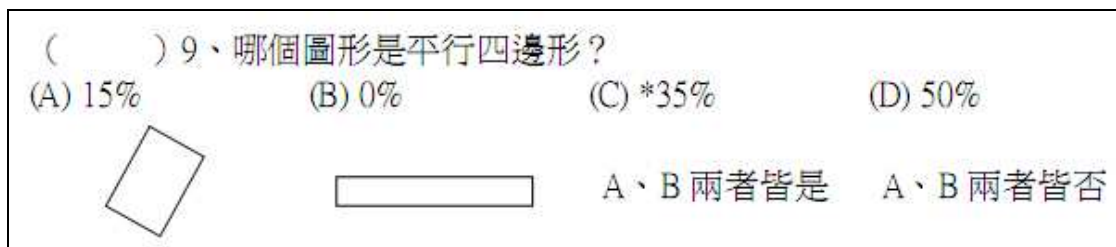


圖 4-162 延後測平行四邊形與長方形互斥對照組

在 a-I-9 中，分類組的答對率 54.8 為%，察覺組的答對率為 70.6%此結果列於圖 4-163，本題顯示，察覺組的表現明顯好於分類組。

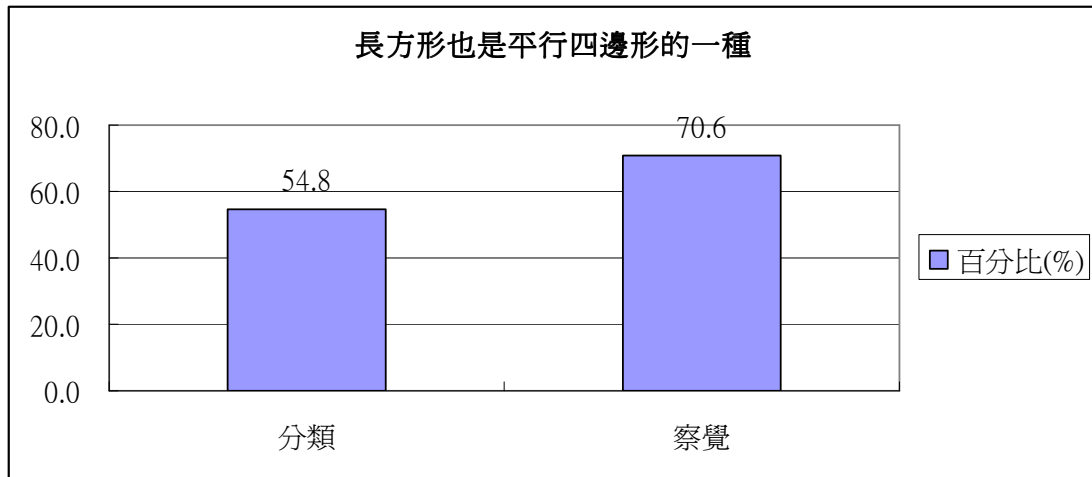


圖 4-163 後測平行四邊形與長方形互斥答對率長條圖

到了 f-I-9 中，分類組的答對率為 64.5%，察覺組的答對率為 82.4%，對照組的答對率為 35.3%，此結果列於圖 4-164，本題顯示，與後測的趨勢相同，此外，分類組與察覺組的表現均有上升，且均較對照組為優。

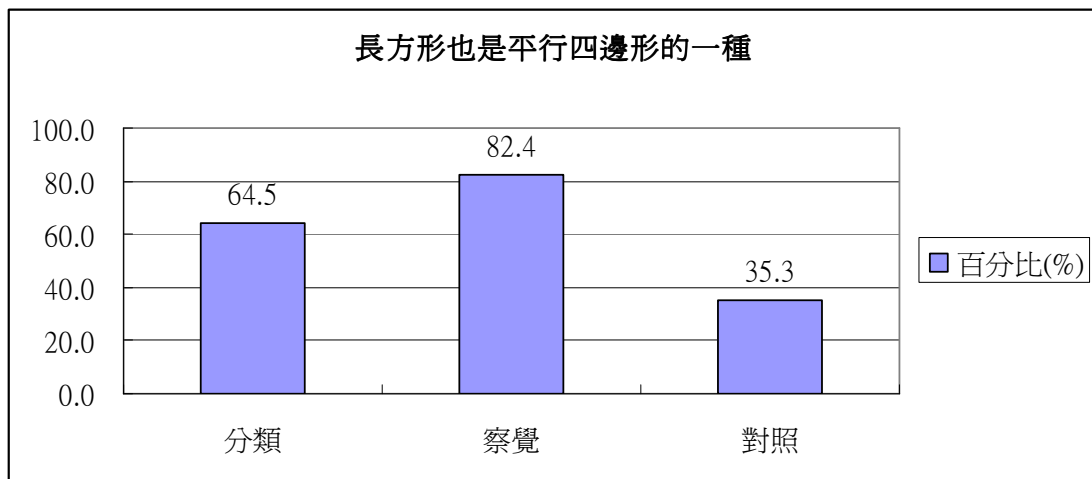


圖 4-164 延後測平行四邊形與長方形互斥答對率長條圖

第十小題目的，在偵測互斥思維辨識迷思類型，包含關係的部份，常見到學生會認為，這個圖形既然是菱形了，就不能算是平行四邊形。

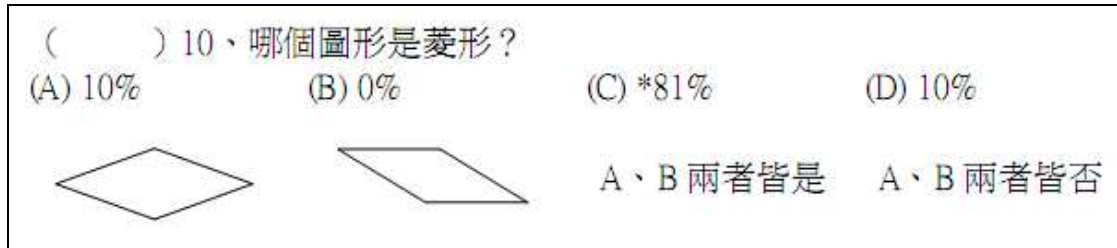


圖 4-165 後測平行四邊形與菱形互斥分類組

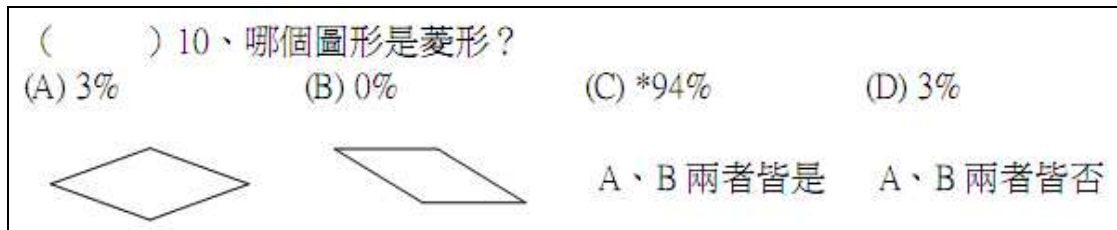


圖 4-166 後測平行四邊形與菱形互斥察覺組

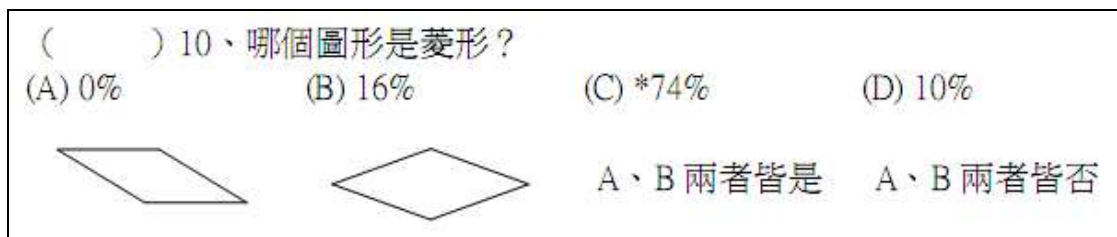


圖 4-167 延後測平行四邊形與菱形互斥分類組

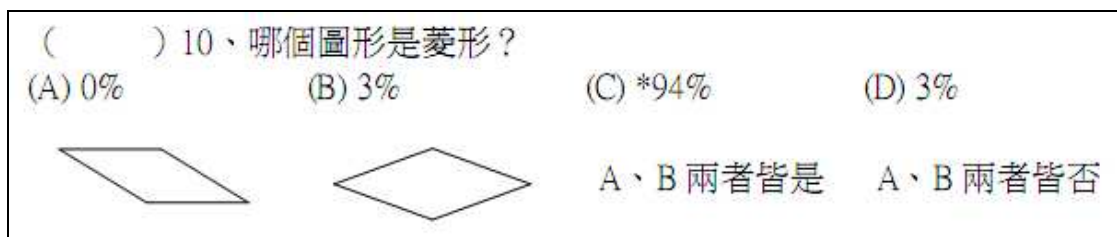


圖 4-168 延後測平行四邊形與菱形互斥察覺組

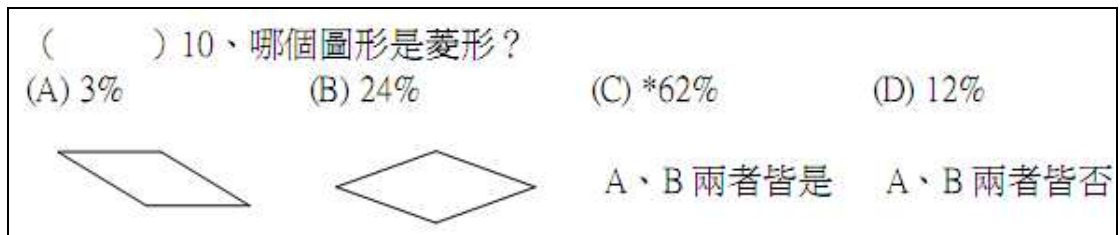


圖 4-169 延後測平行四邊形與菱形互斥對照組

在 a-I-10 中，分類組的答對率為 80.6%，察覺組的答對率為 94.1%，此結果列於圖 4-170，本題顯示，察覺組的表現較分類組為佳。

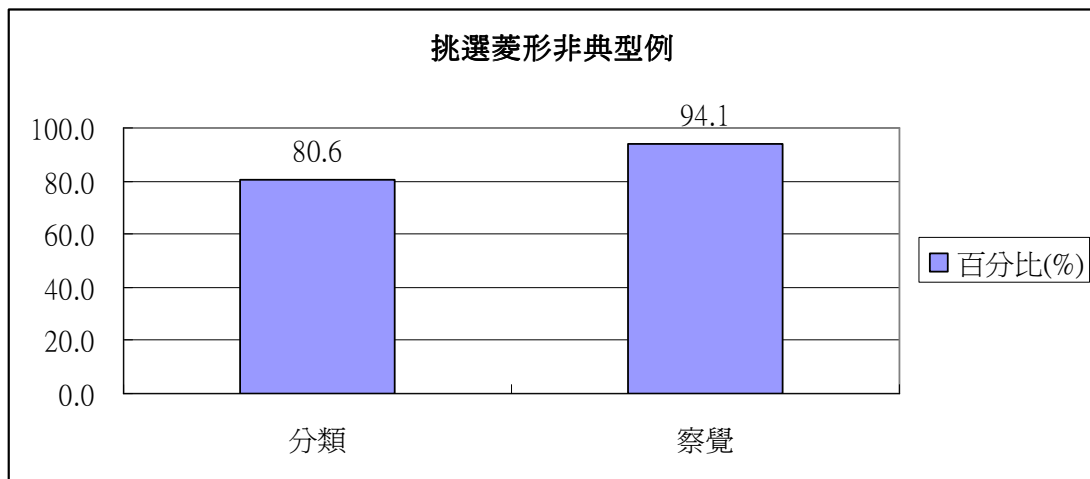


圖 4-170 後測平行四邊形與菱形互斥答對率長條圖

到了 f-I-10 中，分類組的答對率為 74.2%，察覺組的答對率為 94.1%，對照組的答對率為 61.8%，此結果列於圖 4-171，本題顯示，與後測的趨勢相同，但分類組表現略為下降，察覺與分類兩組均較對照組為優。

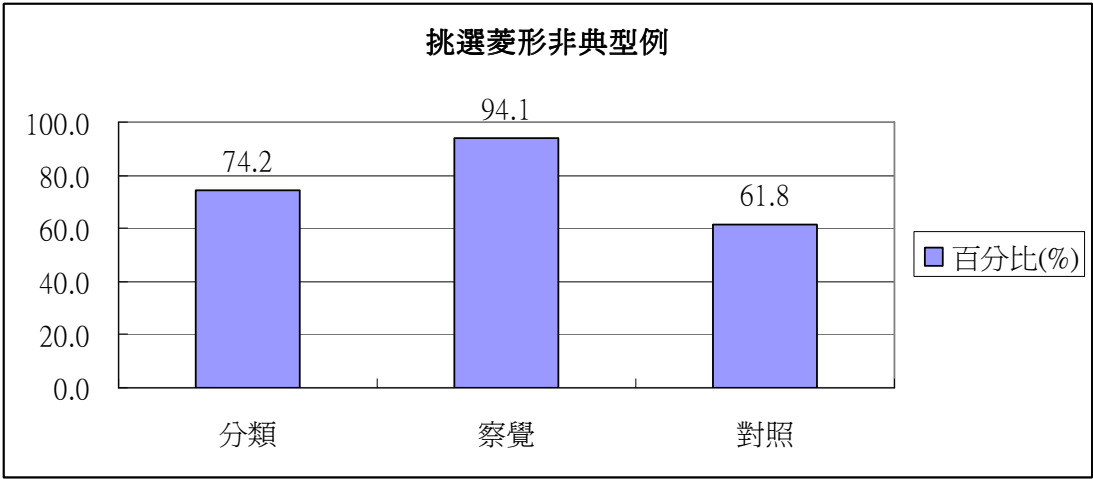


圖 4-171 延後測平行四邊形與菱形互斥答對率長條圖

第十一小題目的，是在偵測使用相同圖形，且方位擺設分別為菱形與平行四邊形典型例的狀況下，學生能否接受，菱形典型例也是平行四邊形的一種。

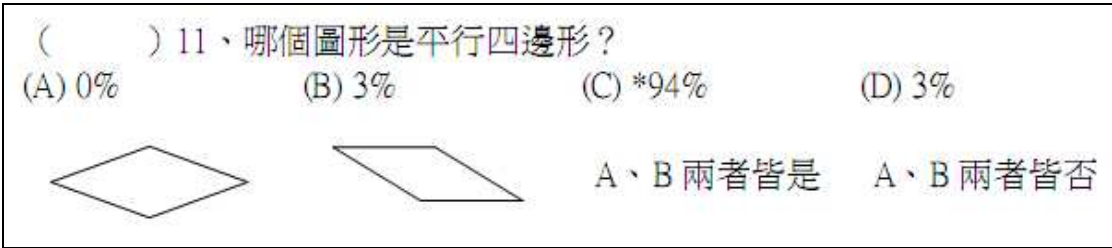


圖 4-172 後測平行四邊形與菱形互斥分類組

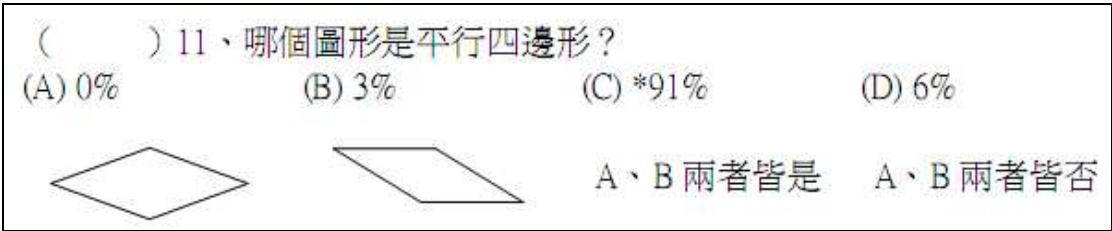


圖 4-173 後測平行四邊形與菱形互斥察覺組

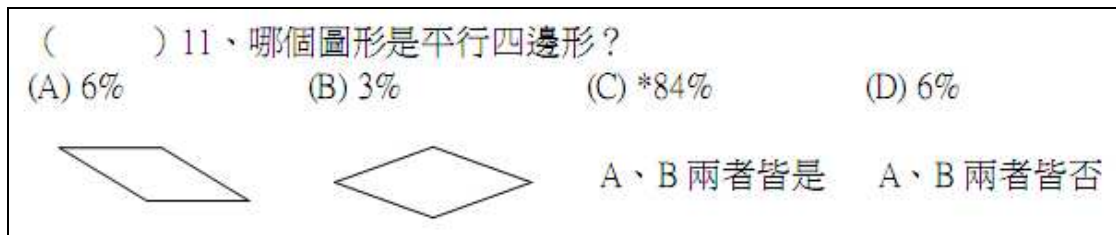


圖 4-174 延後測平行四邊形與菱形互斥分類組

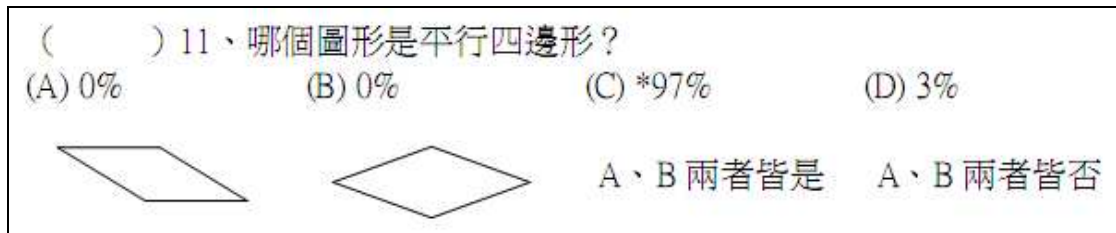


圖 4-175 延後測平行四邊形與菱形互斥察覺組

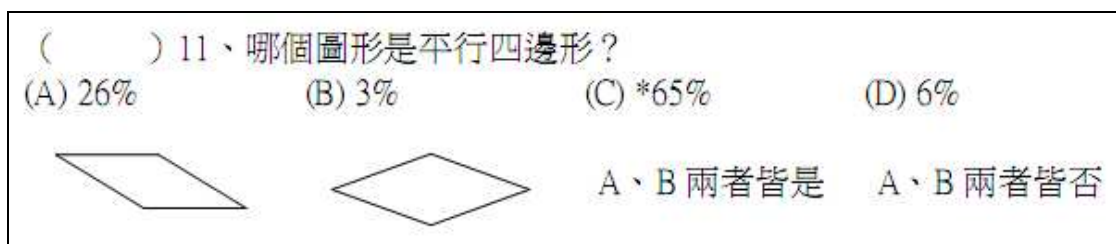


圖 4-176 延後測平行四邊形與菱形互斥對照組

在 a-I-11 中，分類組的答對率為 93.5%，察覺組的答對率為 91.2%，此結果列於圖 4-177，本題顯示，兩組在經過教學活動後，絕大多數學生，接受了菱形典型例也是平行四邊形的一種。

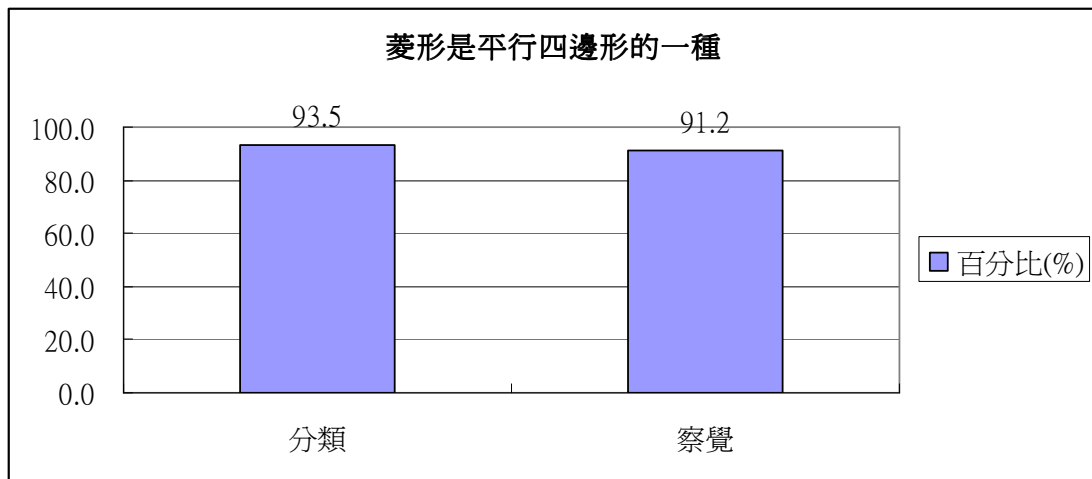


圖 4-177 後測平行四邊形與菱形互斥答對率長條圖

到了 f-I-11 中，分類組的答對率為 83.9%，察覺組的答對率為 97.1%，對照組的答對率為 64.7%，此結果列於圖 4-178，本題顯示，分類組略為下降，察覺組略微上升，察覺與分類兩組均較對照組為優。

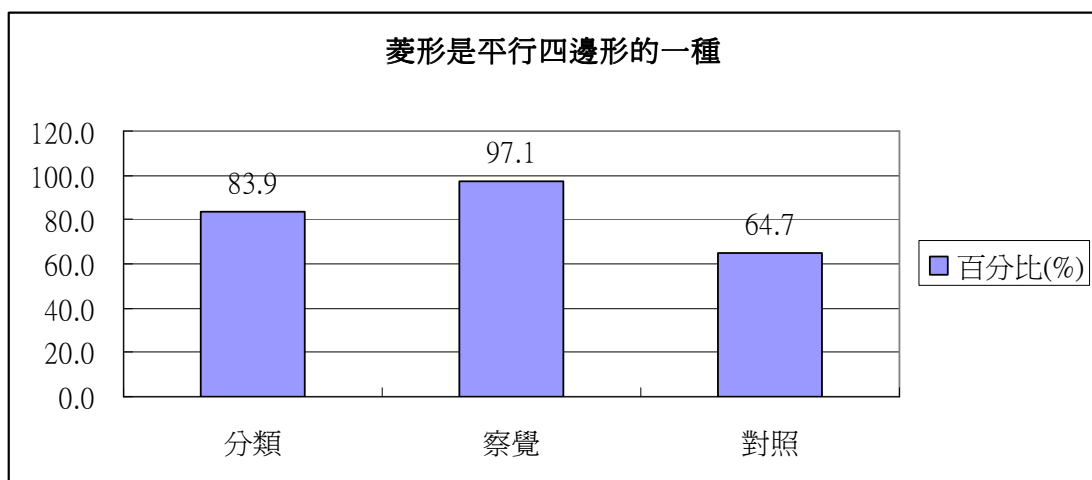





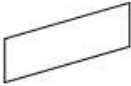








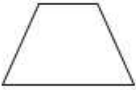
















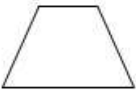
圖 4-178 延後測平行四邊形與菱形互斥答對率長條圖

第二大題，在圖 4-179 到圖 4-203，列出了後測與延後測中，分類、察覺與對照組，每個配合題選項的勾選比例，與完全挑選正確的答對率百分比。

Ⓐ*100%	Ⓑ0%	Ⓒ0%	Ⓓ3%	Ⓔ10%
				
Ⓔ0%	Ⓖ0%	Ⓗ*100%	Ⓘ0%	Ⓜ0%
				
Ⓖ0%	Ⓗ3%	Ⓘ*94%	Ⓝ0%	Ⓟ0%
				

1、挑選出全部的正方形：84%

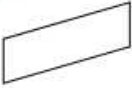














圖 4-179 後測正方形配合題分類組

Ⓐ*91%	Ⓑ0%	Ⓒ3%	Ⓓ3%	Ⓔ18%
				
Ⓔ0%	Ⓖ0%	Ⓗ*91%	Ⓘ0%	Ⓜ6%
				
Ⓖ0%	Ⓗ15%	Ⓘ*85%	Ⓝ0%	Ⓟ0%
				

1、挑選出全部的正方形：74%
















圖 4-180 後測正方形配合題察覺組

第肆章 結果與討論

Ⓐ3%	Ⓑ0%	Ⓒ3%	Ⓓ*100%	Ⓔ3%
				
Ⓕ*100%	Ⓖ0%	Ⓗ3%	Ⓙ0%	⓫6%
				
⓬*97%	⓯3%	⓰3%	⓳0%	⓴0%
				
















1、挑選出全部的正方形：87%

圖 4-181 延後測正方形配合題分類組

Ⓐ0%	Ⓑ0%	Ⓒ0%	Ⓓ*91%	Ⓔ9%
				
Ⓕ*88%	Ⓖ0%	Ⓗ0%	Ⓙ0%	⓫15%
				
⓬*85%	⓯6%	⓰0%	⓳0%	⓴0%
				















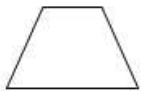
1、挑選出全部的正方形：74%

圖 4-182 延後測正方形配合題察覺組

Ⓐ0%	Ⓑ0%	Ⓒ0%	Ⓓ*91%	Ⓔ0%
				
Ⓔ*88%	Ⓖ0%	Ⓗ0%	Ⓘ0%	Ⓜ3%
				
Ⓚ*88%	Ⓛ3%	Ⓝ0%	Ⓢ0%	Ⓟ0%
				

1、挑選出全部的正方形：88%

圖 4-183 延後測正方形配合題對照組

Ⓐ*19%	Ⓑ0%	Ⓒ13%	Ⓓ*87%	Ⓔ3%
				
Ⓔ16%	Ⓖ0%	Ⓗ*19%	Ⓘ*100%	Ⓜ0%
				
Ⓚ*97%	Ⓛ0%	Ⓝ*19%	Ⓢ0%	Ⓟ0%
				

2、挑選出全部的長方形：13%

圖 4-184 後測長方形配合題分類組

第肆章 結果與討論

Ⓐ*41% 	Ⓑ0% 	Ⓒ12% 	Ⓓ*82% 	Ⓔ3%
Ⓕ38% 	Ⓖ0% 	Ⓗ*38% 	Ⓘ*91% 	Ⓚ3%
Ⓛ*88% 	Ⓜ0% 	Ⓝ*35% 	Ⓟ0% 	Ⓡ0%

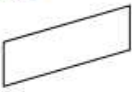














2、挑選出全部的長方形：29%

圖 4-185 後測長方形配合題察覺組

Ⓐ23% 	Ⓑ0% 	Ⓒ*100% 	Ⓓ*26% 	Ⓔ0%
Ⓕ*26% 	Ⓖ0% 	Ⓗ*97% 	Ⓘ6% 	Ⓚ0%
Ⓛ*26% 	Ⓜ0% 	Ⓝ*97% 	Ⓟ3% 	Ⓡ0%
















2、挑選出全部的長方形：19%

圖 4-186 延後測長方形配合題分類組

Ⓐ35% 	Ⓑ0% 	Ⓒ*91% 	Ⓓ*38% 	Ⓔ0% 
Ⓕ*35% 	Ⓖ0% 	Ⓗ*85% 	Ⓙ12% 	Ⓚ0% 
Ⓛ*35% 	Ⓜ0% 	Ⓝ*91% 	Ⓟ0% 	Ⓡ0% 

2、挑選出全部的長方形：32%






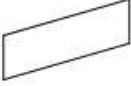








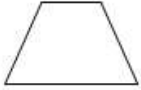
圖 4-187 延後測長方形配合題察覺組

Ⓐ18% 	Ⓑ0% 	Ⓒ*91% 	Ⓓ*12% 	Ⓔ3% 
Ⓕ*15% 	Ⓖ0% 	Ⓗ*85% 	Ⓙ9% 	Ⓚ3% 
Ⓛ*12% 	Ⓜ0% 	Ⓝ*91% 	Ⓟ0% 	Ⓡ0% 

2、挑選出全部的長方形：9%






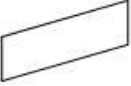








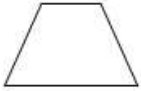
圖 4-188 延後測長方形配合題對照組

第肆章 結果與討論

Ⓐ*55%	Ⓑ0%	Ⓒ0%	Ⓓ3%	Ⓔ*84%
				
Ⓔ3%	Ⓖ0%	Ⓗ*29%	Ⓘ3%	Ⓙ*77%
				
Ⓚ3%	Ⓛ*90%	Ⓜ*81%	Ⓝ0%	Ⓞ0%
				

3、挑選出全部的菱形：23%

圖 4-189 後測菱形配合題分類組

Ⓐ*62%	Ⓑ0%	Ⓒ3%	Ⓓ3%	Ⓔ*91%
				
Ⓔ0%	Ⓖ0%	Ⓗ*35%	Ⓘ0%	Ⓙ*79%
				
Ⓚ0%	Ⓛ*91%	Ⓜ*88%	Ⓝ0%	Ⓞ0%
				

3、挑選出全部的菱形：32%

圖 4-190 後測菱形配合題察覺組

Ⓐ0%	Ⓑ0%	Ⓒ3%	Ⓓ*55%	Ⓔ*74%
Ⓔ*74%	Ⓖ0%	Ⓗ0%	Ⓘ0%	Ⓛ*90%
Ⓚ*87%	Ⓛ*84%	Ⓜ0%	Ⓝ0%	Ⓟ0%

3、挑選出全部的菱形：32%

圖 4-191 延後測菱形配合題分類組

Ⓐ0%	Ⓑ0%	Ⓒ0%	Ⓓ*56%	Ⓔ*82%
Ⓔ*62%	Ⓖ0%	Ⓗ3%	Ⓘ3%	Ⓛ*79%
Ⓚ*79%	Ⓛ*85%	Ⓜ0%	Ⓝ0%	Ⓟ0%

3、挑選出全部的菱形：44%

圖 4-192 延後測菱形配合題察覺組

第肆章 結果與討論

Ⓐ3%	Ⓑ0%	Ⓒ0%	Ⓓ*29%	Ⓔ*71%
Ⓔ*29%	Ⓖ0%	Ⓗ6%	Ⓘ9%	Ⓜ*85%
Ⓚ*50%	Ⓛ*79%	Ⓝ0%	Ⓢ0%	Ⓟ0%

3、挑選出全部的菱形：15%

圖 4-193 延後測菱形配合題對照組

Ⓐ0%	Ⓑ*90%	Ⓒ0%	Ⓓ0%	Ⓔ0%
Ⓔ0%	Ⓖ*94%	Ⓗ0%	Ⓘ0%	Ⓜ0%
Ⓚ0%	Ⓛ0%	Ⓝ0%	Ⓢ*94%	Ⓟ*90%

4、挑選出全部的梯形：74%

圖 4-194 後測梯形配合題分類組

Ⓐ3%	Ⓑ*85%	Ⓒ9%	Ⓓ3%	Ⓔ0%
Ⓕ0%	Ⓖ*85%	Ⓗ3%	Ⓙ3%	⓫15%
Ⓚ3%	Ⓛ0%	Ⓜ3%	Ⓝ*85%	Ⓞ*85%

4、挑選出全部的梯形：74%

圖 4-195 後測梯形配合題察覺組

Ⓐ0%	Ⓑ*97%	Ⓒ0%	Ⓓ0%	Ⓔ0%
Ⓕ0%	Ⓖ*97%	Ⓗ0%	Ⓙ0%	⓫0%
Ⓚ0%	Ⓛ0%	Ⓜ0%	Ⓝ*87%	Ⓞ*97%

4、挑選出全部的梯形：84%

圖 4-196 延後測梯形配合題分類組

第肆章 結果與討論

Ⓐ6%	Ⓑ*85%	Ⓒ0%	Ⓓ0%	Ⓔ3%
Ⓕ0%	Ⓖ*85%	Ⓗ0%	Ⓙ9%	⓫0%
Ⓖ0%	Ⓗ0%	⓫0%	⓪*91%	⓫*85%















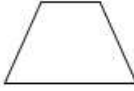
4、挑選出全部的梯形：82%

圖 4-197 延後測梯形配合題察覺組

Ⓐ0%	Ⓑ*88%	Ⓒ0%	Ⓓ3%	Ⓔ0%
Ⓕ0%	Ⓖ*85%	Ⓗ0%	Ⓙ0%	⓫0%
Ⓖ0%	Ⓗ0%	⓫3%	⓪*59%	⓫*62%



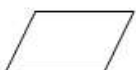











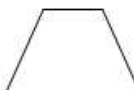
4、挑選出全部的梯形：50%

圖 4-198 延後測梯形配合題對照組

㉑*35% 	㉒6% 	㉓*94% 	㉔*42% 	㉕*81% 
㉖*74% 	㉗3% 	㉘*35% 	㉙*35% 	㉚*84% 
㉛*35% 	㉜*65% 	㉝*45% 	㉞6% 	㉟10% 

5、挑選出全部的平行四邊形：29%

圖 4-199 後測平行四邊形配合題分類組

㉑*50% 	㉒9% 	㉓*82% 	㉔*47% 	㉕*95% 
㉖*71% 	㉗6% 	㉘*50% 	㉙*50% 	㉚*76% 
㉛*50% 	㉜*68% 	㉝*50% 	㉞6% 	㉟9% 

5、挑選出全部的平行四邊形：38%

圖 4-200 後測平行四邊形配合題察覺組

第肆章 結果與討論

Ⓐ*84%	Ⓑ3%	Ⓒ*35%	Ⓓ*39%	Ⓔ*81%
Ⓕ*42%	Ⓖ3%	Ⓗ*39%	Ⓙ*97%	⓫*65%
Ⓖ*39%	Ⓛ*65%	Ⓜ*35%	Ⓝ6%	Ⓞ3%

5、挑選出全部的平行四邊形：32%

圖 4-201 延後測平行四邊形形配合題分類組

Ⓐ*76%	Ⓑ3%	Ⓒ*53%	Ⓓ*47%	Ⓔ*71%
Ⓕ*50%	Ⓖ9%	Ⓗ*53%	Ⓙ*82%	⓫*71%
Ⓖ*59%	Ⓛ*65%	Ⓜ*50%	Ⓝ3%	Ⓞ3%

5、挑選出全部的平行四邊形：44%

圖 4-202 延後測平行四邊形形配合題察覺組

Ⓐ*82%	Ⓑ3%	Ⓒ*32%	Ⓓ*29%	Ⓔ*85%
Ⓕ*35%	Ⓖ6%	Ⓗ*32%	Ⓘ*88%	⓫*68%
⓪*38%	Ⓛ*68%	Ⓜ*32%	Ⓝ3%	Ⓞ3%

5、挑選出全部的平行四邊形：18%

圖 4-203 延後測平行四邊形形配合題對照組

後測時的圖形配合題答對率，結果列於圖 4-204，本題顯示，除了挑選菱形的問題外，察覺組的表現，均較分類組為優。

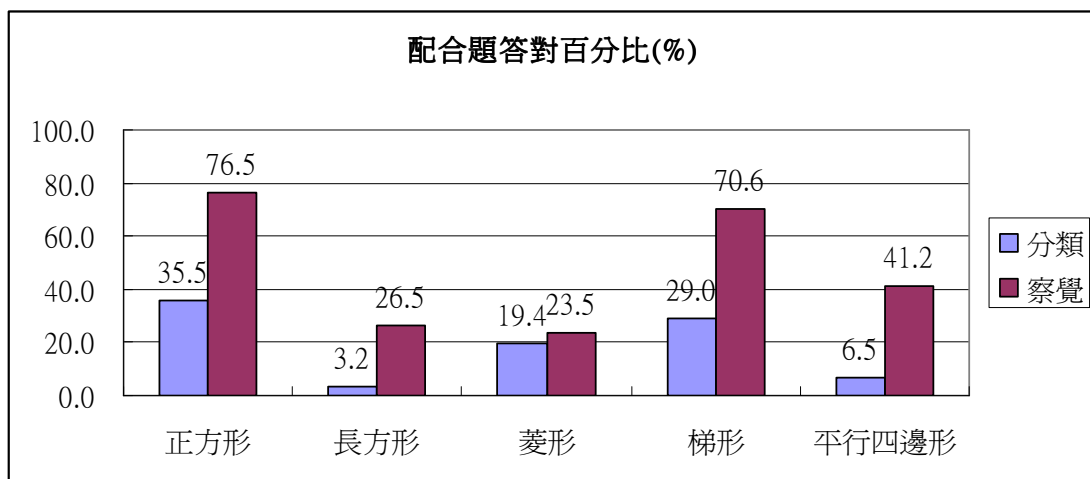


圖 4-204 後測配合題答對率長條圖

延後測時的圖形配合題答對率，結果列於圖 4-205，本題顯示除了挑選菱形的問題外，分類組於正方形、梯形比起後測，表現均大幅上升，其餘的趨勢是相同的，除了正方形外，分類組與察覺組

第肆章 結果與討論

的表現均較對照組為優。

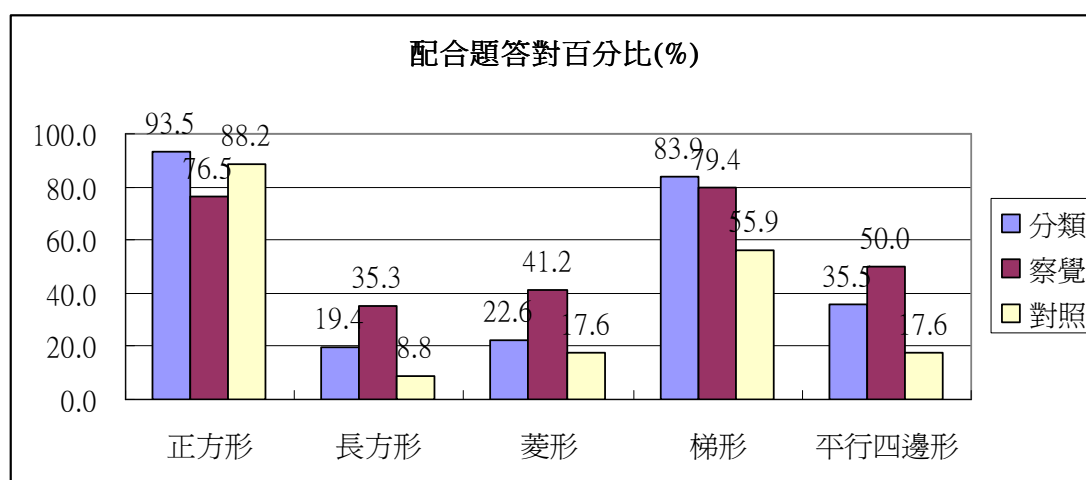


圖 4-205 延後測配合題答對率長條圖

第五節 兩種策略的應用討論

一、非典型例性質察覺策略

研究者透過擔任非典型例性質察覺教學活動的實驗教學者，由教學歷程以及蒐集資料的整理、回饋、反思後，對於非典型例性質察覺策略的應用，有以下發現。

首先，學生在過往的學習經驗中，對於許多的圖形元素性質，例如對邊是否平行？對角線是否相等？擁有幾個直角？其實都有接觸與認識，所以大多數學生，能夠從非典型例圖形，正確觀察到圖形的共通性質。

但由於學生並沒有，或者極少利用文字，來記錄敘述這些性質，也甚少利用口語，來表達敘述這些性質，過往的學習經驗，多半是老師講述，或者從課本、講義等的紙本文件，聽到、看到這些圖形元素的性質。

很自然的，展現在非典型例性質察覺教學活動實驗時，研究者發現，學生其實是觀察到這些圖形的共同性質了，但是講出來的時候，卻顯得比較沒把握，利用文字記錄敘述時，就更沒信心。

多數同學一開始記錄下來時，即使提到了正確的共通性質，但並不是很完整，例如他可能想表達的是『兩組對邊平行』，寫下來的卻是不完整的敘述『互相平行』。

過往學習經驗，造成學生能夠觀察到圖形的共通性質，口語表達與文字記錄的能力，卻比較不足，而非典型例性質察覺策略，要求學生以文字紀錄圖形的共通性質，而且要利用口語來發表。

經過師生對話討論，最後學生需要替正方形、長方形、菱形、梯形、平行四邊形，用文字來敘述定義，這個寫下來的過程，是很

好的概念定義統整方式。

由於學生是能夠觀察到圖形特徵的，所以把它寫下來這個要求，對學生來說不是辦不到，而是做得好或者不好，寫下來與師生對話中講出來這兩個歷程，幫助學生統整回溯，過往學習到這些幾何圖形的性質，也因此修正錯誤的認知，釐清模糊的概念。

當然，也有少部分的學生，在課堂上沒有反應互動，亦於學習單上完全空白，這樣的學生，就沒有辦法經驗，文字記錄所帶來的統整歷程。

二、分類教學策略

研究者透過擔任分類教學活動的實驗教學者，由教學歷程以及蒐集資料的整理、回饋、反思後，對於非典型例性質察覺策略的應用，有以下發現。

學生參與分類活動的興致，是非常高昂的，相對於講述式的數學課程，實際將四邊形圖卡進行分類，對學生來說，不太像是上數學課，而是在進行一個遊戲，由收回的學習單上可以發現，每一個學生都有進行實作分類的活動，並且把結果給記錄下來。

分類的過程，是一個將注意力放在圖形組成元素的好機會，例如當學生在找有四個直角的四邊形時，焦點是在四個直角，而不是整個圖形的輪廓。

由於經歷了比較長的時間，利用分類準則操作來辨識圖形，所以到了圖形命名時，比起單純的告知規定，將分類準則中，有四個直角的四邊形，有四個相等的邊的四邊形，轉化為長方形與菱形的圖形定義，對學生來說，印象是深刻許多的，另一方面，單分類準

則操作的安排，是為四邊形命名規則的脈絡，來做準備。

到了雙準則分類操作，同時進行分隔有四個直角的四邊形，與沒四個直角的四邊形，與分隔有四個相等的邊的邊的四邊形，與沒四個相等的邊的邊的四邊形，替正方形的出現，以及正方形亦為長方形的一種與菱形的一種，營造了良好的脈絡，學生很自然的承襲此脈絡，理解並接受這個包含關係。

較為可惜的是，分類教學活動，需要比較長的教學時間，以及較良好的班級秩序，而且到了雙準則分類操作時，討論問題的難度，對於部分同學的難度是相當高的，這些同學雖然能夠進行分類，往往因為基礎數學實力的不足，在面對討論問題時，感受到難度後，會呈現思考裹足不前的現象。

三、分類組與察覺組的前測與後測比較

前測的第二大題，可以看出學生是否瞭解正確的四邊形定義，在前測的 97 人當中，如果在正方形、長方形、菱形、平行四邊形與梯形中，能夠挑選出兩個以上的正確圖形定義，研究者認為這樣的學生，初步具有瞭解辨識圖形需要依據定義的能力，此能力顯現 van Hiele 層次 1 的水準，並非僅依輪廓與對圖形名稱的感受，來辨識四邊形。

而在前測的第三大題作答時，在四邊形包含關係上，能夠瞭解到正方形也是長方形、菱形、平行四邊形的一種，研究者認為這樣的學生，初步具有依據定義理解包含關係的能力，此能力顯現 van Hiele 層次 2 的水準。

圖 4-206 與圖 4-207 的統計圓餅圖顯示，前測的 97 個學生當

第肆章 結果與討論

中，有層次 1 水準的學生，達 37.1%，有層次 2 水準的學生，達 13.4%。

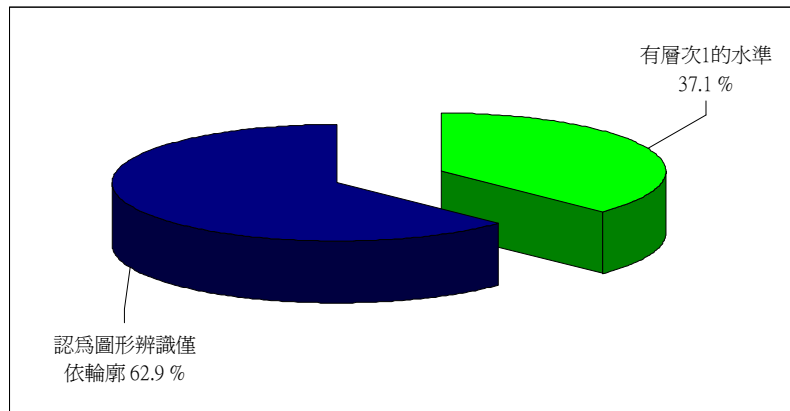


圖 4-206 前測層次 1 學生比例圓餅圖

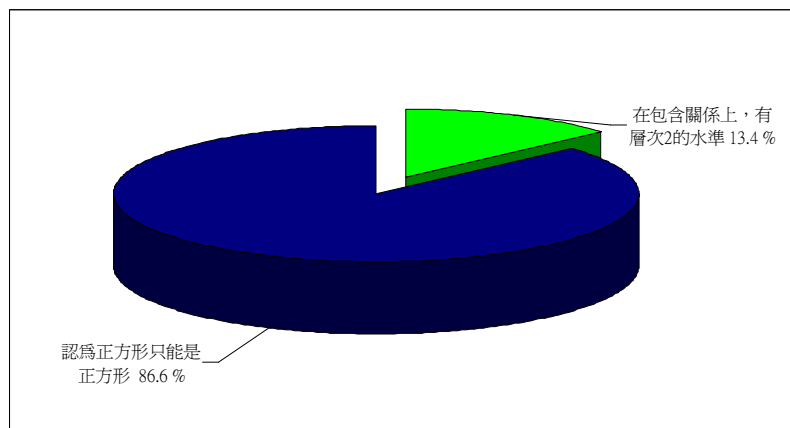


圖 4-207 前測層次 2 學生比例圓餅圖

這裡所使用的層次 1 與層次 2，並非表示學生整體的幾何能力，已經達到分析期和非形式演繹期了，而是在分析期和非形式演繹期的學生，對於四邊形定義的認知，與正方形包含關係的理解，才能夠具有前述的表現。

接下來從後測的結果，看看經過分類教學活動、非典型例性質察覺教學活動的實驗之後，研究者認為在後測中，與圖形定義有關的選擇第 1 到 5 題，能答對 3 題以上，其能力具有層次 1 的水準，

而在後測中，與包含關係有關的選擇第 6 到 11 題，能答對 4 題以上，其能力具有層次 2 的水準。

表 4-1 列出了分類組與察覺組經過實驗，到了後測評量時，都有約為三分之二的學生，瞭解四邊形的圖形定義，以及理解四邊形的包含關係。

表 4-1 分類組與察覺組後測達層次 1 和 2 的人數表

分類組 (34 人)		察覺組 (31 人)	
瞭解圖形定義 (層次 1)	19 人	瞭解圖形定義 (層次 1)	21 人
理解包含關係 (層次 2)	22 人	理解包含關係 (層次 2)	19 人

四、後測與延後測複本試題比較

後測、延後測評量中的 I-1、I-6、I-7、I-8，分別為前測評量中，II-1、II-3、II-5、II-8 的評量試題，彼此為複本試題，所要比較的是，正方形、長方形、菱形、平行四邊形，彼此包含關係混淆的情況，是否獲得了改善？

圖 4-206 比較對照組延後測評量中的 I-1、I-6、I-7、I-8，和分類組與察覺組前測中的 II-1、II-3、II-5、II-8 的答對率情況，這個資料說明了對照組、分類組與察覺組，在未接受教學實驗前，對於正方形、長方形、菱形、平行四邊形彼此包含關係的瞭解程度是相當的。

第肆章 結果與討論

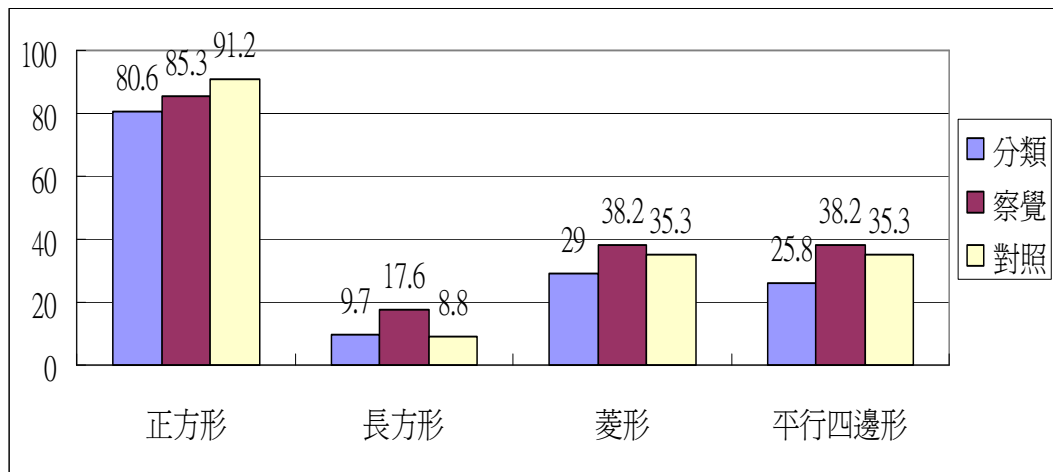


圖 4-208 包含關係的起點比較長條圖

圖 4-209 與圖 4-210，分別是分類組與察覺組，在這四個問題的答對率比較，由此結果，可以發現兩個策略，均改善了包含關係混淆的迷思，但在正方形是長方形的一種這個部份，仍然是最難突破的。

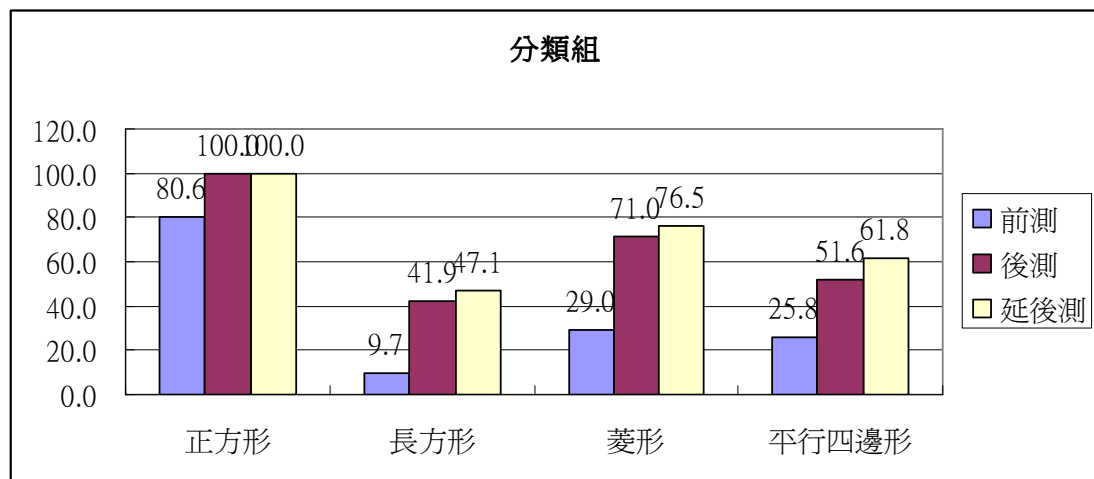


圖 4-209 分類組測驗可比較題答對率長條圖

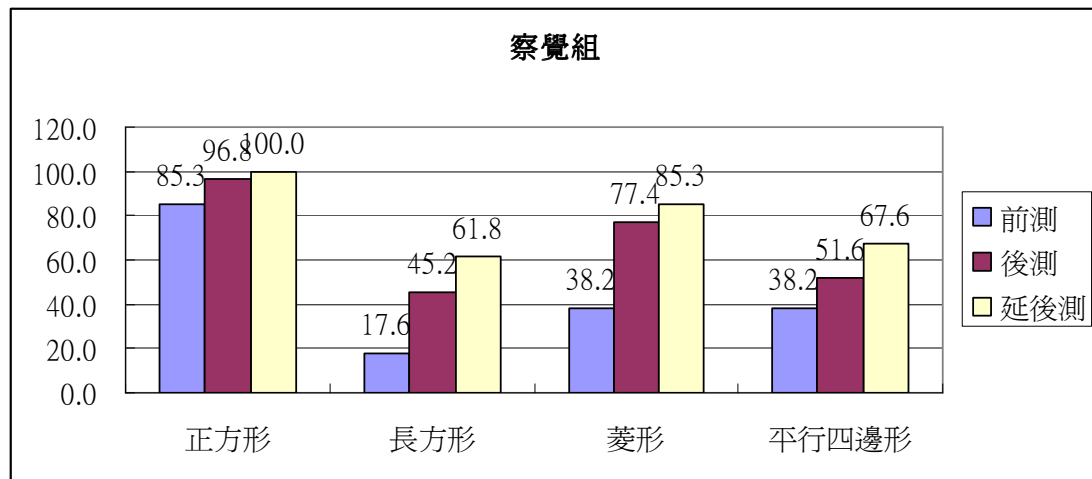


圖 4-210 察覺測驗可比較題答對率長條圖

第伍章 結論與建議

結論與建議共有兩個小節，研究者提出了四個待答問題：

- 一、根據圖形定義辨識四邊形，比根據圖形名稱辨識四邊形正確率高的現象，是否存在於實驗的學生當中？若存在的話原因為何？如何縮減此差距？
- 二、分類教學策略，是否改善了四邊形圖形的辨識迷思？
- 三、非典型例性質察覺教學策略，是否改善了四邊形圖形的辨識迷思？
- 四、在四邊形圖形辨識上，如何讓學生從特殊化過度到一般化？也就是從辨識時主要依據輪廓判斷，存在各種迷思現象，到擁有圖形定義的概念，能夠理解在判斷圖形時，需要依據定義的內容，並且能瞭解正確的四邊形定義。

第一小節的結論，回答四個待答問題，並且比較學校教學現況、分類策略、非典型例性質察覺教學策略，這三種四邊形辨識教學的學習進行流程。

第二小節是建議，研究者對於分類與察覺兩種數學能力，提出後續的教學與研究的建議。

第一節 結論

研究者提出了四個待答問題，現在，研究者依據第四章的結果與討論，來提出回答，首先，從前測評量中，定義版試題與名稱版試題的答題結果，可以發現，這個現象是存在於實驗學生中的。

定義版中，長方形、正方形、菱形的答對率，又高於平行四邊形與梯形，這個結果顯示了，學生辨識四邊等長、有四個直角的能力，高於辨識對邊是否平行。

研究者認為，學生在過往的學習經驗中，累積了很多關於圖形定義內容的知識，所以判斷邊長是否相等，角是否為直角，對邊是否平行，還算是一件容易的事。

但學生並不清楚在挑選圖形時，需要根據圖形的定義來回答，也就是說，學生學習了很多圖形定義的內容，對長方形、正方形、菱形、平行四邊形與梯形這些圖形名稱，也不陌生，但兩者沒有產生連結，不知道在挑選圖形時，必須根據圖形的定義，而不是對這個名稱的直觀感覺。

而要縮減依據定義判斷圖形與依據名稱判斷圖形的差距，首先要建立學生圖形定義的概念，並且說明四邊形的定義內容，製造然後強化定義內容與圖形名稱之間的連結。

接著，由後測、延後測、對照組測驗的資料，顯示分類教學策略，改善了四邊形圖形辨識迷思。

分類教學策略有效的原因，在於學生操作分類過程中，將關注焦點，由整個圖形輪廓，進入到圖形的組成結構元素，增加了操弄元素的機會，而分類準則的安排，又為四邊形的名稱，提供了可循的脈絡，命名的活動，則連結圖形名稱與圖形定義。

再來，由後測、延後測、對照組測驗的資料，也顯示非典型例性質察覺教學活動，改善了四邊形圖形辨識迷思。

非典型例性質察覺教學策略有效的原因，在於學生觀察到的正方形、長方形、菱形、梯形、平行四邊形，都是非典型例，所以在性質察覺時，不容易產生如「這些都是平行四邊形嘛…」的想法，反而會出現「有的好像是平行四邊形，有的可以算是嗎？」。

在此策略中，觀察非典型例圖形的共通性質，對學生來說，並不算困難，觀察到圖形定義不困難，聯想到圖形名稱時卻感到疑惑，這是連結圖形名稱與圖形定義的好機會，也提供了合適的條件，向學生說明，數學世界的四邊形，與生活中四邊形不同之處。

最後，研究者來分析，在四邊形圖形辨識的議題上，分類教學策略，與非典型例性質察覺教學策略，是如何讓學生從特殊化過度到一般化，建立依據圖形定義判別圖形，並且瞭解正確的四邊形辨識內容。

在學校課程中，介紹正方形、長方形、菱形、梯形、平行四邊形的時候，教師會採用的方式，首先是介紹特殊四邊形的定義，然後以這些四邊形的典型例圖形作為示範，讓學生由圖形觀察到定義所描述的性質，在這個過程中，產生四邊形圖形名稱與定義之間的連結，最後給予適當的練習題，強化圖形名稱與定義內容的連結，學生順利的學習到如何辨識四邊形，這個學習流程，如圖 5-1。

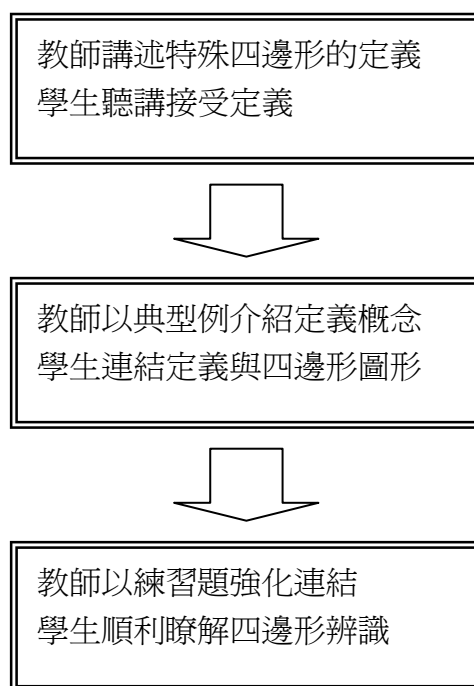


圖 5-1 學校課程四邊形辨識學習流程圖

在分類策略中，教師採用的方式，是先讓學生對四邊形圖卡進行分類，依據的是分類準則，而分類準則的設定是圖形的性質，此刻學生的關照焦點，是圖形的結構，而非圖形的輪廓，其後再利用每一種分類完成後，四邊形圖卡的分布情況，來介紹圖形的命名脈絡，以及正方形、長方形、菱形、梯形、平行四邊形，彼此之間的包含關係，這個學習流程，如圖 5-2。

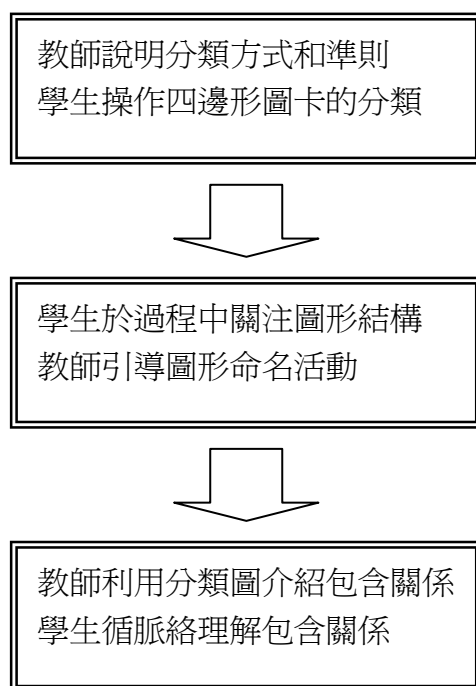


圖 5-2 分類策略四邊形辨識學習流程圖

在非典型例性質察覺教學策略中，教師採用的方式，是先讓學生觀察大量的非典型例圖形，然後紀錄這些非典型例圖形的共通性質，由於提供的是非典型例圖形，學生不容易聯想到，我現在看的就是某種四邊形，也就不會被典型例迷思給限制，能夠在觀察圖形的過程中，注意力進入到圖形的組成結構，而非僅停留在圖形的輪廓。

其後文字記錄與口語發表所觀察到性質的歷程，提供了學生整合與思考四邊形定義的好機會，由於要學生在直觀感受上，接受非典型例圖形，通通都是正方形、長方形、菱形、梯形、平行四邊形，並不是自然且容易的，反而會產生矛盾與疑惑，正是一個良好的時機，讓教學者來闡述數學世界與日常生活不同，要辨別圖形依據的是定義，不是直覺的輪廓感受。

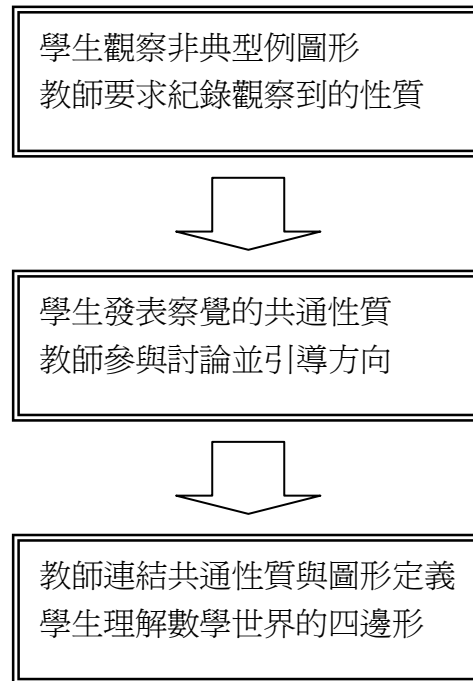


圖 5-3 非典型例性質察覺學習流程圖

第二節 建議

研究者的建議分為兩部份，一部份是對於教育實務的建議，另外一部份是對於未來研究的建議。

在教育實務上，第一點，是老師在教學上，可以善用分類概念與性質察覺。

分類概念是數學知識中，用來建立脈絡以及瞭解內容結構的重要能力，不僅限於四邊形的命名與包含關係的理解，學習數學的過程中，分類其實都一直跟隨在身邊的，分類能力不僅是重要的數學能力，妥善的利用分類觀念對於教學是很有幫助的。

例如以國中生在七年級所學習到的整數系而言，它可以分成奇數跟偶數，可以分成正整數、負整數與零，每一種分類的方法，都幫助學生更進一步瞭解整數系。

八年級所學到的平行四邊形判別性質，也可以拿來做為分類的準則，兩對角線是否互相平分？兩雙對角是否分別相等？兩雙對邊是否分別相等？是否有一組對邊平行且相等？讓學生在分類的過程中，瞭解到平行四邊形的等價定義。

學習幾何圖形的知識內容時，學生應該要獲得足夠操弄圖形的機會，但隨著年級的增加，數學課程自然變得份量越來越多、難度越來越高，教師掌握課程與教學進度的主控性，也就越來越強。

學生所處的學習地位，就會變得越來越被動，接受老師講述的內容，接受課本條列的公式與定義，接受經典範例的解題模式，學習的主動性漸漸消失了。

人類天生具有探索察覺的本能，數學的課程設計上，老師在進行教學時，都要給學生機會，引發他們察覺的能力，Duval 所提的

光學放大縮小、位移、割補等方式，就是一種探索察覺，隨著數學內容的加深加廣，察覺的能力就顯得更重要。

第二點，在觀察圖形時，口語發表與文字記錄，是良好的整合幾何知識，與增進幾何能力的方法。

在教學現場，學生習慣用眼睛看黑板寫的、用耳朵聽老師講的，雖然累積了許多的幾何知識，但可能是片段的、零碎的、甚至誤解的。

口語發表與文字記錄，就是請學生用嘴巴說出來，用紙寫下來，這個說出來跟寫下來的歷程，可以讓學生去檢視所學過的知識，發覺其中的錯誤、矛盾與不足，進而整合完整的幾何知識，達成能力的提升。

在未來研究上，建議有兩點，第一點，圖形辨識的議題上，如何同時應用分類與非典型例性質察覺兩種教學策略。

研究者認為，將分類教學策略，與非典型例性質察覺教學策略，同時應用於一個教學活動時，並不會互相干擾，而且比起單獨採用一種教學策略，成效應該更為良好。

但如何整合這兩個教學策略？教學活動的順序安排，是以分類教學活動為主體，採用非典型例性質察覺策略的精神，或者以非典型例性質察覺教學活動為主體，採用分類策略的精神，甚至發展一個全新的架構，都是將來研究可行的方向。

第二點，幾何圖形的學習架構中，典型例與非典型例，各自所扮演的角色為何？應當如何建立適當交互應用兩者的模式？

在學習幾何圖形時，典型例的使用，是作為生活經驗與數學世界的墊步連結，提供了適合的範例，讓老師向學生介紹種種的圖形

定義、性質、幾何量與各種應用。

然後學生所接觸的圖形，大多數為典型例，在圖形辨識上，造成了典型例迷思，在學習幾何時，容易有以典型例代表整個圖形，利用特例來思考的問題。

在圖形辨識的議題，經驗非典型例，是破除典型例迷思的有效方法，而更深入的幾何題材，在學習困難的研究上，非典型例的妥善使用，應該對於改善問題相當有幫助。

參考文獻

中文部分

- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (民 95). Research methods in education (徐振邦, 梁文蓁, 吳曉青 & 陳儒晰, Trans.). 台北縣: 韋伯文化國際.
- Patton, M. Q. (民 84). Qualitative ecaluation and research methods (吳芝儀 & 李奉儒, Trans.). 台北縣: 桂冠圖書公司.
- Strauss, A., & Corbin, J. (民 90). Basic of Qualitative Research (吳芝儀 & 廖梅花, Trans.). 嘉義市: 濤石文化事業有限公司.
- 王文正. (民 93). 以模糊理論與試題反應理論探討國小四五年級學童四邊形概念之發展. 國立台北師範學院.
- 石宛臻. (民 93). 反例對國小五年級學童四邊形幾何概念調整的影響. 國立台北師範學院.
- 林玲誼. (民 96). 概念圖合作學習應用於國中「四邊形」單元學習成效之研究. 高雄師範大學.
- 南一書局. (民 96). 國民小學數學第一冊: 南一書局企業股份有限公司.
- 南一書局. (民 96). 國民小學數學第七冊: 南一書局企業股份有限公司.
- 南一書局. (民 96). 國民小學數學第十冊: 南一書局企業股份有限公司.
- 南一書局. (民 96). 國民小學數學第十冊: 南一書局企業股份有限公司.

公司。

高耀琮。(民 91)。兒童平面幾何圖形概念之探討。國立台北師範學院。

康軒文教事業。(民 96)。國小數學課本第一冊：康軒文教事業股份有限公司。

康軒文教事業。(民 96)。國小數學課本第七冊：康軒文教事業股份有限公司。

康軒文教事業。(民 96)。國小數學課本第十冊：康軒文教事業股份有限公司。

康軒文教事業。(民 96)。國小數學課本第四冊：康軒文教事業股份有限公司。

康軒文教事業。(民 96)。國民小學數學備課用書第一冊：康軒文教事業股份有限公司。

康軒文教事業。(民 96)。國民小學數學備課用書第七冊：康軒文教事業股份有限公司。

康軒文教事業。(民 96)。國民小學數學備課用書第十冊：康軒文教事業股份有限公司。

康軒文教事業。(民 96)。國民小學數學備課用書第四冊：康軒文教事業股份有限公司。

康軒文教事業。(民 96)。國中數學備課用書第四冊：康軒文教事業股份有限公司。

康軒文教事業。(民 96)。國中數學備課用書第五冊：康軒文教事業股份有限公司。

張春興。(民 95)。張氏心理學辭典。台北市：台灣東華。

- 張炳煌. (民 92). 國小四年級學童四邊形概念之診斷教學研究. 國立台北師範學院.
- 教育部. (民 92). 國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域. 台北市: 教育部.
- 郭生玉. (民 93). 教育測驗與評量. 臺北市: 精華書局.
- 陳創義. (民 94). 青少年幾何形狀概念的『學習與教學』之研究期中進度報告. 台北市: 行政院國家科學委員會專題研究計畫.
- 陳創義. (民 95). 青少年幾何形狀概念的『學習與教學』之研究期中進度報告. 台北市: 行政院國家科學委員會專題研究計畫.
- 陳創義. (民 96). 青少年幾何形狀概念的『學習與教學』研究成果報告. 台北市: 行政院國家科學委員會專題研究計畫.
- 游世斌. (民 96). 國小五年級學童平行四邊形概念結構分析之研究. 國立台中教育大學.
- 黃志祥. (民 92). 國小六年級學童四邊形幾何概念的包含關係. 國立台北師範學院.
- 翰林出版. (民 96). 國民小學數學第九冊: 翰林出版事業股份有限公司.
- 翰林出版. (民 96). 國民小學數學第二冊: 翰林出版事業股份有限公司.
- 翰林出版. (民 96). 國民小學數學第五冊: 翰林出版事業股份有限公司.
- 謝貞秀. (民 91). 國小中年級學童平面幾何圖形概念之探究. 國立台北師範學院.

西文部份

- Chen, C.-Y., Lin, B., Lin, F.-L., & Chang, Y.-P. (2007). Mathematical classification learning activities for shapes recognition - triangles as an example. Paper presented at the Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Duval, R. (1995). Geometrical Picture: Kinds of Representation and Specific Processing. Berlin: Springer.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive of view. Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st century. Paper presented at the ICMI.
- Hiele, V. (1986). Structure and insight: A theory of mathematics education. New York: Academic Press.
- Okazaki, M., & Fujita, T. (2007). Prototype phenomena and common cognitive paths in the understanding of the inclusion relations between quadrilaterals in Japan and Scotland Paper presented at the Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept images and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 19.

Vinner, S., & Dreyfu, T. (1989). Images and Definitions for the concept of function . Journal for Research in Mathematics Education, 20, 11.

附錄

附錄依序為預試評量、前測評量、後測評量、延後測評量、非典型例性質察覺教學活動、分類教學活動。

七 年 班 號 姓名：

請寫出正方形的定義：	請畫出一個正方形：
請寫出長方形的定義：	請畫出一個長方形：
請寫出菱形的定義：	請畫出一個菱形：
請寫出梯形的定義：	請畫出一個梯形：
請寫出平行四邊形的定義：	請畫出一個平行四邊形：

七 年 班 號 姓名：

日期：97 年 月 日

一、 圖形定義題

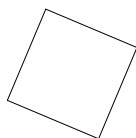
勾選一個最合適的定義於□中，若你認為都不合適，就在「其它」寫下合適的定義。

正方形	<input type="checkbox"/> 有四個直角，而且四個邊等長的四邊形。 <input type="checkbox"/> 有四個直角、四個邊等長，而且上下兩邊要擺成水平的四邊形。 <input type="checkbox"/> 其它：_____。
長方形	<input type="checkbox"/> 有四個直角的四邊形，圖形中長跟寬可以相等，也可以不相等。 <input type="checkbox"/> 有四個直角的四邊形，圖形中長跟寬不能相等。 <input type="checkbox"/> 其它：_____。
菱形	<input type="checkbox"/> 四個邊等長的四邊形。 <input type="checkbox"/> 一條對角線是水平線、另一條對角線是垂直線的四邊形。 <input type="checkbox"/> 正方形將對角線位置變成水平與平行。 <input type="checkbox"/> 其它：_____。
梯形	<input type="checkbox"/> 只有兩個邊平行的四邊形。 <input type="checkbox"/> 上、下底平行，而且將上、下底位置擺成水平的四邊形。 <input type="checkbox"/> 上、下底不等長且平行，另外不平行的兩邊必須等長。 <input type="checkbox"/> 其它：_____。
平行四邊形	<input type="checkbox"/> 上、下兩邊平行，左、右兩邊平行，圖形中可以有直角。 <input type="checkbox"/> 上、下兩邊平行，左、右兩邊平行，圖形中不能有直角。 <input type="checkbox"/> 上、下兩邊平行，左、右兩邊平行，上下邊長不等於左右邊長。 <input type="checkbox"/> 有兩組對邊平行，四個邊可以都不是水平線。 <input type="checkbox"/> 其它：_____。

二、 圖形單選題 每題填寫一個最適當的答案

() 1、哪個圖形是正方形？

(A)



(B)



(C)

選項(A)、(B)兩者都不是。

(D)

選項(A)、(B)兩者都不是。

() 2、哪個圖形是正方形？

(A)



(B)



(C)

選項(A)、(B)兩者都不是。

(D)

選項(A)、(B)兩者都不是。

() 3、哪個圖形是長方形？

(A)



(B)



(C)

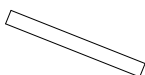
選項(A)、(B)兩者都不是。

(D)

選項(A)、(B)兩者都不是。

() 4、哪個圖形是長方形？

(A)



(B)



(C)

選項(A)、(B)兩者都不是。

(D)

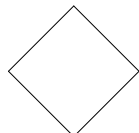
選項(A)、(B)兩者都不是。

() 5、哪個圖形是菱形？

(A)



(B)



(C)

選項(A)、(B)兩者都不是。

(D)

選項(A)、(B)兩者都不是。

() 6、哪個圖形是菱形？

(A)



(B)



(C)

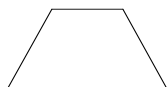
選項(A)、(B)兩者都不是。

(D)

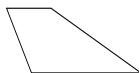
選項(A)、(B)兩者都不是。

() 7、哪個圖形是梯形？

(A)



(B)



(C)

選項(A)、(B)兩者都不是。

(D)

選項(A)、(B)兩者都不是。

() 8、哪個圖形是平行四邊形？

(A)

(B)



(C)

(D)

選項(A)、(B)兩者都是。

選項(A)、(B)兩者都不是。

() 9、哪個圖形是平行四邊形？

(A)

(B)



(C)

(D)

選項(A)、(B)兩者都是。

選項(A)、(B)兩者都不是。

() 10、哪個圖形是平行四邊形？

(A)

(B)



(C)

(D)

選項(A)、(B)兩者都是。

選項(A)、(B)兩者都不是。

三、 圖形判斷是非題

<p>請就圖一到圖五進行是非判斷，正確打○，錯誤打x，每一題可能不只一個○，也可能只有一個或者沒有，只要你認為是正確的選項，就都打○，錯誤就打x。</p>	<div data-bbox="877 1283 959 1364" data-label="Image"> </div> <p>圖一</p> <div data-bbox="1043 1292 1356 1429" data-label="List-Group"> <ul style="list-style-type: none"> () 圖一是長方形。 () 圖一是菱形。 () 圖一是平行四邊形。 () 圖一是梯形。 </div>
<div data-bbox="209 1547 301 1599" data-label="Image"> </div> <p>圖二</p> <div data-bbox="383 1543 694 1680" data-label="List-Group"> <ul style="list-style-type: none"> () 圖二是正方形。 () 圖二是菱形。 () 圖二是平行四邊形。 () 圖二是梯形。 </div>	<div data-bbox="890 1523 944 1626" data-label="Image"> </div> <p>圖三</p> <div data-bbox="1043 1543 1356 1680" data-label="List-Group"> <ul style="list-style-type: none"> () 圖三是正方形。 () 圖三是長方形。 () 圖三是平行四邊形。 () 圖三是梯形。 </div>
<div data-bbox="201 1787 309 1856" data-label="Image"> </div> <p>圖四</p> <div data-bbox="383 1792 694 1928" data-label="List-Group"> <ul style="list-style-type: none"> () 圖四是正方形。 () 圖四是長方形。 () 圖四是菱形。 () 圖四是平行四邊形。 </div>	<div data-bbox="865 1794 968 1850" data-label="Image"> </div> <p>圖五</p> <div data-bbox="1043 1792 1303 1928" data-label="List-Group"> <ul style="list-style-type: none"> () 圖五是正方形。 () 圖五是長方形。 () 圖五是菱形。 () 圖五是梯形。 </div>

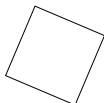
四、 圖形單選題 每題填寫一個最適當的答案

() 1、哪個圖形有四個直角，而且四個邊等長？

(A)



(B)



(C)

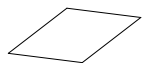
選項(A)、(B)兩者都是。

(D)

選項(A)、(B)兩者都不是。

() 2、哪個圖形有四個直角，而且四個邊等長？

(A)



(B)



(C)

選項(A)、(B)兩者都不是。

(D)

選項(A)、(B)兩者都不是。

() 3、哪個圖形有四個直角？

(A)



(B)



(C)

選項(A)、(B)兩者都是。

(D)

選項(A)、(B)兩者都不是。

() 4、哪個圖形有四個直角？

(A)



(B)



(C)

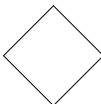
選項(A)、(B)兩者都不是。

(D)

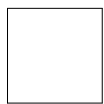
選項(A)、(B)兩者都不是。

() 5、哪個圖形四個邊等長？

(A)



(B)



(C)

選項(A)、(B)兩者都是。

(D)

選項(A)、(B)兩者都不是。

() 6、哪個圖形四個邊等長？

(A)



(B)



(C)

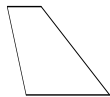
選項(A)、(B)兩者都不是。

(D)

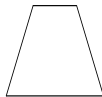
選項(A)、(B)兩者都不是。

() 7、哪個圖形只有兩個邊平行？

(A)



(B)



(C)

選項(A)、(B)兩者都不是。

(D)

選項(A)、(B)兩者都不是。

() 8、哪個圖形兩組對邊平行(有兩個邊平行、另外兩個邊也平行)？

(A)



(B)



(C)

選項(A)、(B)兩者都不是。

(D)

選項(A)、(B)兩者都不是。

() 9、哪個圖形兩組對邊平行(有兩個邊平行、另外兩個邊也平行)？

(A)



(B)



(C)

選項(A)、(B)兩者都不是。

(D)

選項(A)、(B)兩者都不是。

() 10、哪個圖形兩組對邊平行(有兩個邊平行、另外兩個邊也平行)？

(A)



(B)



(C)

選項(A)、(B)兩者都不是。

(D)

選項(A)、(B)兩者都不是。

五、 圖形挑選配合題

(A)	(B)	(C)	(D)
(E)	(F)	(G)	(H)
(I)	(J)	(K)	(L)
(M)	(N)	(O)	(P)

請由(A)～(P)這 16 個圖形，回答以下問題，選項可重複使用。

- 1、挑選出全部的正方形：_____。
- 2、挑選出全部的長方形：_____。
- 3、挑選出全部的菱形：_____。
- 4、挑選出全部的梯形：_____。
- 5、挑選出全部的平行四邊形：_____。
- 6、挑選出全部有四個直角，而且四個邊等長的圖形：_____。
- 7、挑選出全部有四個直角的圖形：_____。
- 8、挑選出全部四個邊等長的圖形：_____。
- 9、挑選出全部只有兩個邊互相平行的圖形：_____。
- 10、挑選出全部有兩組對邊平行(有兩個邊平行、另外兩個邊也平行)的圖形：_____。

七 年 班 號 姓名：

日期：97 年 月 日

一、單選題 請選出最適合的答案

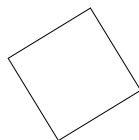
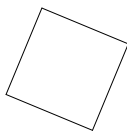
() 1、下列哪個圖形為正方形？

(A)

(B)

(C)

(D)

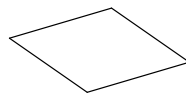


以上皆是。

() 2、右圖是平面上的一個圖形，它是一個正方形嗎？

(A) 不是，因為它沒有四個直角。(B) 不是，它是長方形。

(C) 是，因為它四邊等長。(D) 是，換個角度來看他就是正方形。



() 3、若四邊形 DEFG 是一個長方形， \overline{DE} 為長方形的長， \overline{EF} 為寬，則

(A) $\overline{DE} > \overline{EF}$

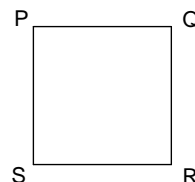
(B) $\angle D$ 、 $\angle E$ 、 $\angle F$ 、 $\angle G$ 均為 90°

(C) \overline{DE} 與 \overline{EF} 不可以相等 (D) 以上皆是。

() 4、右圖四邊形 PQRS 的四個角均為 90° ，則在何種情況下，PQRS 為長方形？

(A) $\overline{PQ} = 4$ 、 $\overline{QR} = 4$ (B) $\overline{PQ} = 4$ 、 $\overline{QR} = 4.1$

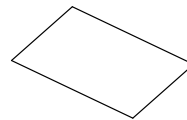
(C) $\overline{PQ} = 4.1$ 、 $\overline{QR} = 4.1$ (D) 以上皆是。



() 5、右圖是平面上的一個圖形，它是一個長方形嗎？

(A) 不是，因為它沒有四個直角。(B) 不是，它是正方形。

(C) 是，因為它對邊平行。(D) 是，換個角度來看他就是長方形。



() 6、哪個圖形是長方形？

(A)

(B)

(C)

(D)



A、B 兩者皆是

A、B 兩者皆否

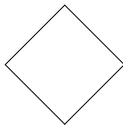
() 7、哪個圖形是菱形？

(A)

(B)

(C)

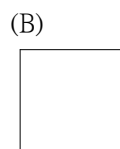
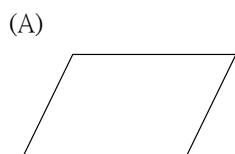
(D)



A、B 兩者皆是

A、B 兩者皆否

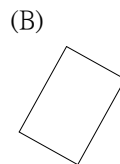
() 8、哪個圖形是平行四邊形？



(C)
A、B 兩者皆是

(D)
A、B 兩者皆否

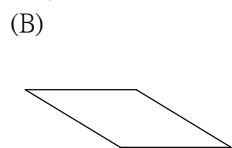
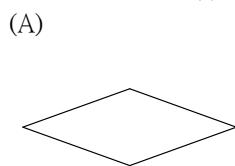
() 9、哪個圖形是平行四邊形？



(C)
A、B 兩者皆是

(D)
A、B 兩者皆否

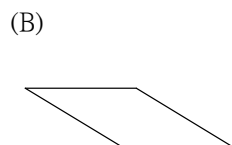
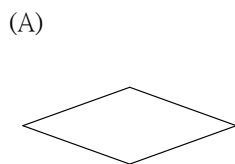
() 10、哪個圖形是菱形？



(C)
A、B 兩者皆是

(D)
A、B 兩者皆否

() 11、哪個圖形是平行四邊形？



(C)
A、B 兩者皆是

(D)
A、B 兩者皆否

二、配合題 挑選出所有的答案

Ⓐ 	Ⓑ 	Ⓒ 	Ⓓ 	Ⓔ
Ⓕ 	Ⓖ 	Ⓗ 	Ⓙ 	Ⓚ
Ⓚ 	Ⓛ 	Ⓜ 	Ⓝ 	Ⓞ

請由(A)~(O)這 15 個圖形，回答以下問題，選項可重複使用。

- 1、挑選出全部的正方形：_____。
- 2、挑選出全部的長方形：_____。
- 3、挑選出全部的菱形：_____。
- 4、挑選出全部的梯形：_____。
- 5、挑選出全部的平行四邊形：_____。

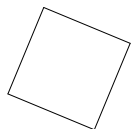
七年 班 號 姓名：

日期：97 年 月 日

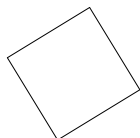
一、單選題 請選出最適合的答案

() 1、下列哪個圖形為正方形？

(A)



(B)



(C)



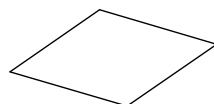
(D)

以上皆是。

() 2、右圖是平面上的一個圖形，它是一個正方形嗎？

(A) 是，因為它有四邊等長。(B) 是，換個角度來看他就是正方形。

(C) 不是，它是長方形。(D) 不是，因為它沒有四個直角。



() 3、若四邊形 DEFG 是一個長方形， \overline{DE} 為長方形的寬， \overline{EF} 為長，則

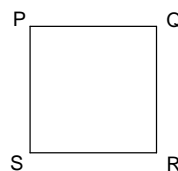
(A) \overline{DE} 長度應該小於 \overline{EF} 長度 (B) $\angle D$ 、 $\angle E$ 、 $\angle F$ 、 $\angle G$ 均為 90°

(C) \overline{DE} 與 \overline{EF} 不可以等長 (D) 以上選項都對。

() 4、右圖四邊形 PQRS 的四個角均為 90° ，則在何種情況下，PQRS 為長方形？

(A) $\overline{PQ} = 6$ 、 $\overline{QR} = 6$ (B) $\overline{PQ} = 6$ 、 $\overline{QR} = 6.1$

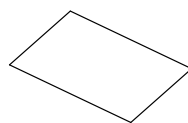
(C) $\overline{PQ} = 6.1$ 、 $\overline{QR} = 6.1$ (D) 選項 A、B、C 都可以。



() 5、右圖是平面上的一個圖形，它是一個長方形嗎？

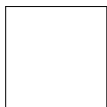
(A) 不是，因為它沒有四個直角。(B) 是，因為它對邊平行。

(C) 不是，它是正方形。(D) 是，換個角度來看他就是長方形。

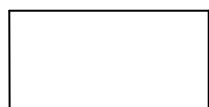


() 6、哪個圖形是長方形？

(A)



(B)



(C)

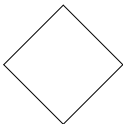
A、B 兩者皆是

(D)

A、B 兩者皆否

() 7、哪個圖形是菱形？

(A)



(B)



(C)

A、B 兩者皆是

(D)

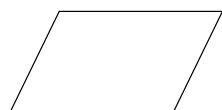
A、B 兩者皆否

() 8、哪個圖形是平行四邊形？

(A)



(B)



(C)

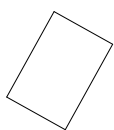
A、B 兩者皆是

(D)

A、B 兩者皆否

() 9、哪個圖形是平行四邊形？

(A)



(B)



(C)

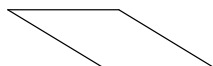
A、B 兩者皆是

(D)

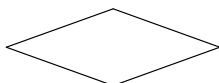
A、B 兩者皆否

() 10、哪個圖形是菱形？

(A)



(B)



(C)

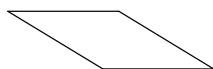
A、B 兩者皆是

(D)

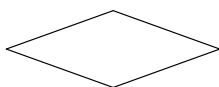
A、B 兩者皆否

() 11、哪個圖形是平行四邊形？

(A)



(B)



(C)

A、B 兩者皆是

(D)

A、B 兩者皆否

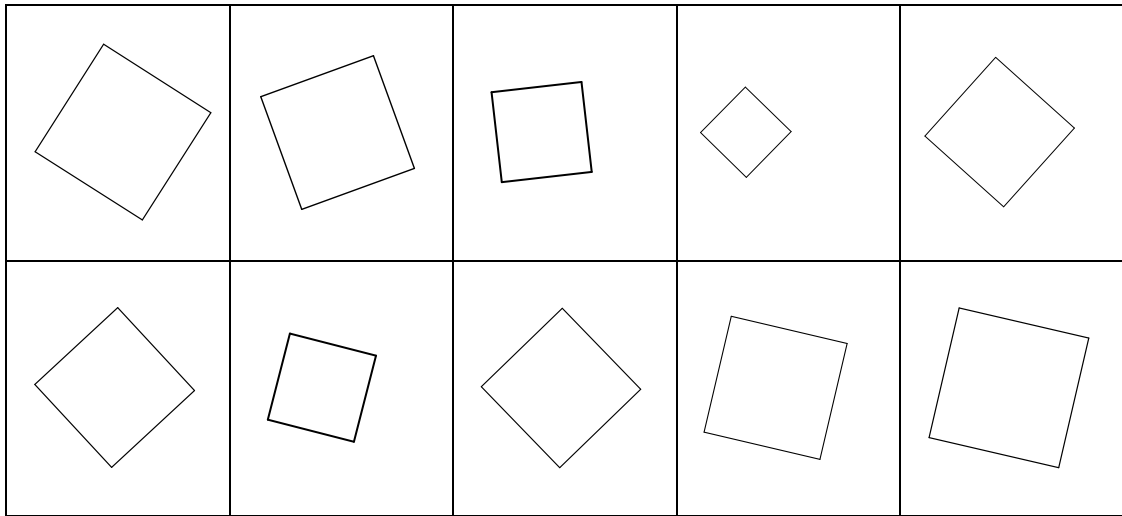
二、配合題 挑選出所有的答案

Ⓐ 	Ⓑ 	Ⓒ 	Ⓓ 	Ⓔ
Ⓕ 	Ⓖ 	Ⓗ 	Ⓙ 	⓫
Ⓚ 	Ⓛ 	Ⓜ 	Ⓝ 	Ⓞ

請由(A)~(O)這 15 個圖形，回答以下問題，選項可重複使用。

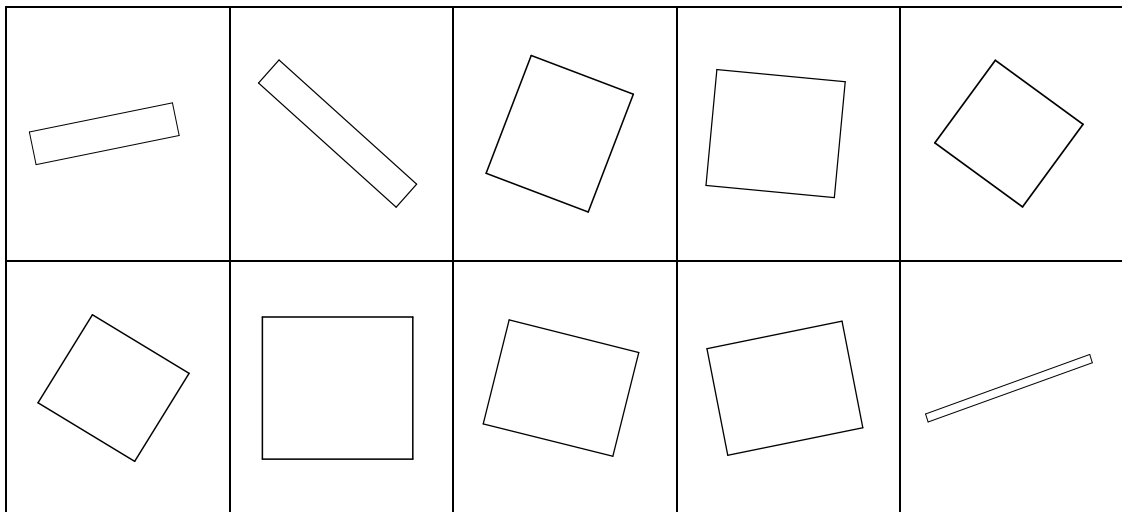
- 1、挑選出全部的正方形：_____。
- 2、挑選出全部的長方形：_____。
- 3、挑選出全部的菱形：_____。
- 4、挑選出全部的梯形：_____。
- 5、挑選出全部的平行四邊形：_____。

甲



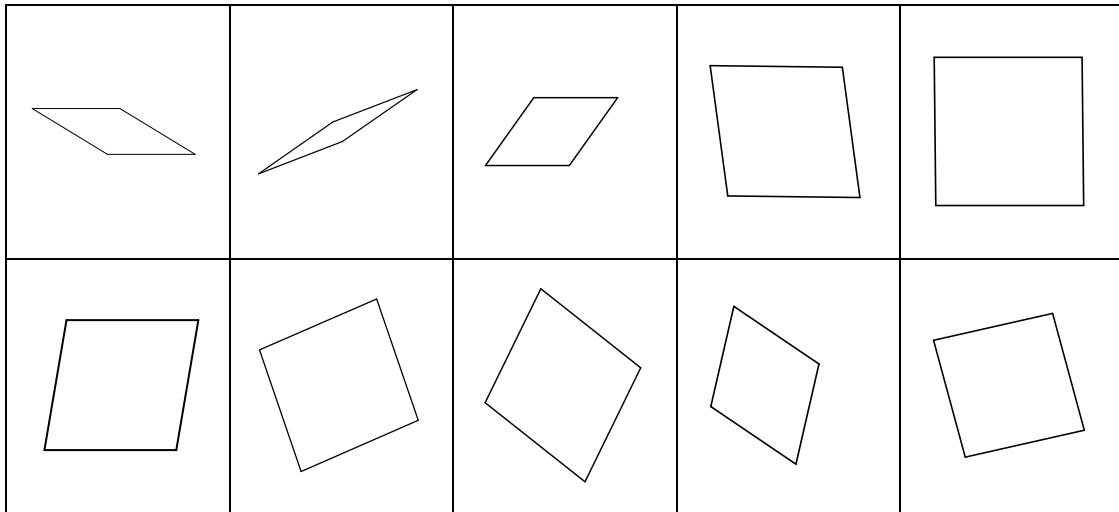
請寫出上列圖形的共同特徵，（至少三點）。

乙



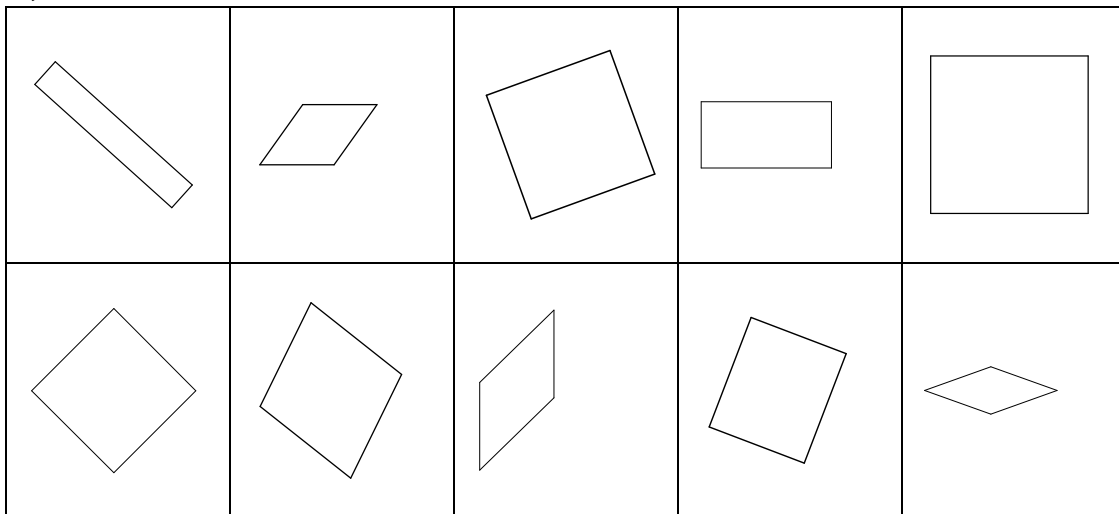
請寫出上列圖形的共同特徵，（至少三點）。

丙



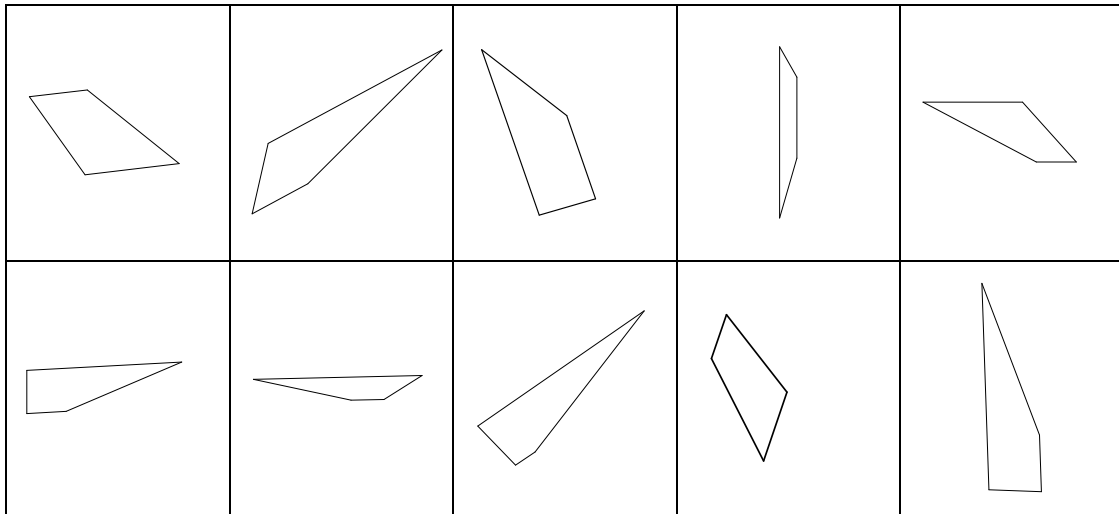
請寫出上列圖形的共同特徵，（至少三點）。

丁



請寫出上列圖形的共同特徵，（至少三點）。

戊



請寫出上列圖形的共同特徵，（至少三點）。

心得整理

由 甲 部分的討論，我們得到：

由 乙 部分的討論，我們得到：

由 丙 部分的討論，我們得到：

由 丁 部分的討論，我們得到：

由 戊 部分的討論，我們得到：

單準則分類操作

分類準則：四邊形有沒有四個直角？

請拿出一條繩子，將有四個直角的四邊形分在繩子的一邊，沒有四個直角的四邊形分在繩子的另一邊，並將你分出來的結果畫在下方：

你覺得有四個直角的四邊形可以叫做【 】，
沒有四個直角的四邊形可以叫做【 】。

分類準則：四邊形有沒有四個相等的邊？

請拿出一條繩子，將有四個相等的邊的邊的四邊形分在繩子的一邊，沒有到四個相等的邊的邊的四邊形分在繩子的另一邊，並將你分出來的結果畫在下方：

你覺得有四個相等的邊的邊的四邊形可以叫做【 】，
沒有四個相等的邊的邊的四邊形可以叫做【 】。

分類準則：四邊形有幾組平行邊？

請拿出兩條繩子，將四邊形分成三個區域，一個是沒有任何一組平行邊的四邊形，一個是只有一組平行邊的四邊形，一個是有兩組平行邊的四邊形，並將你分出來的結果畫在下方：

你覺得恰有一組平行邊的四邊形可以叫做【 】，
有兩組平行邊的四邊形可以叫做【 】。

雙準則分類操作

分類準則：

①分隔有四個直角的四邊形，與沒四個直角的四邊形。

②分隔有四個相等的邊的四邊形，與沒四個相等的邊的四邊形。

請拿出不同顏色的兩條繩子，其中一條繩子，將有四個直角的四邊形分在繩子的一邊，沒有四個直角的四邊形分在繩子的另一邊。另外一條繩子，將有四個相等的邊的四邊形分在繩子的一邊，沒有到四個相等的邊的四邊形分在繩子的另一邊，兩個規則要同時進行，將你分出來的結果畫在下方：

討論問題 正方形算不算長方形？算不算菱形？為什麼？

分類準則：

①分隔有四個直角的四邊形，與沒四個直角的四邊形。

②分隔沒有任何一組平行邊，只有一組平行邊，有兩組平行邊的四邊形。

請拿出兩種不同顏色的繩子，其中一種顏色一條，另一種顏色兩條；一條繩子的，將有四個直角的四邊形分在繩子的一邊，沒有四個直角的四邊形分在繩子的另一邊。兩條繩子的，將四邊形分成三個區域，一個是沒有任何一組平行邊的四邊形，一個是只有一組平行邊的四邊形，一個是有兩組平行邊的四邊形，兩個規則要同時進行，將你分出來的結果畫在下方：

討論問題 為什麼會有兩個框框裡頭沒有圖形？能夠改變繩子的位置讓兩個沒圖形的框框消失嗎？